

J. C. G. NOTTROT

LEERBOEK
DER
NOMOGRAFIE



Lemb. Kebudayaan, Ind.
Kon. Bat. Gen.

V-41.

RDHOTT N.V. - GRONINGEN



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIC OF INDONESIA

120 33-2315

Wraat
V-41

LEERBOEK DER NOMOGRAFIE

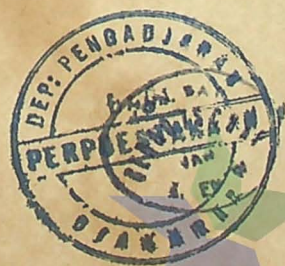
DE CONSTRUCTIE VAN SCHAALNOMOGRAMMEN
VOOR BETREKKINGEN MET DRIE VERANDERLIJKEN

DOOR

J. C. G. NOTTROT

KAPITEIN DER GENIE

MET 96 FIGUREN EN 128 OPGAVEN



P. NOORDHOFF (N.V.) — 1930 — GRONINGEN

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



PERPUSTAKAAN NASIONAL R.I.	
Tanggal	: 20-6-2010
Nomor induk	: 143/PM-Museum/10
BIB. NO	: 0010-3605760
STAMP NO	: 0509113030
Asal	: Museum Pusat

PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

VOORWOORD.

De Nomografie is een der jongste telgen der Toegepaste Wetkunde. Zij is nog in haar eersten groei, doch streeft een hulpwetenschap te worden voor alle gebieden van menschelijke kennis, in 't bijzonder voor de technische vakken en voor het baanbrekende onderzoekingswerk in de laboratoria. Haar taak is het, de — voor elk bijzonder geval — doelmatigste voorstellingswijze af te leiden voor elke daarvoor in aanmerking komende betrekking, hetzij deze in oorsprong theoretisch werd afgeleid, werd gemeten of grafisch werd opgeteekend (formules, tabellen of grafieken).

Voor het grafisch voorstellen van formules komen daartoe vooral in aanmerking de, voor het eerst in 1884, door Maurice d'Ocagne geconstrueerde schaalnomogrammen (nomogrammes à points alignés). Meestal geven deze de eenvoudigste voorstelling van de betrekking.

Het gebruik van schaalnomogrammen verdient daarom aanbeveling:

- 1^o. Als er bij de toepassing van een betrekking geen tijd beschikbaar is, om die betrekking met behulp van de formule(s) te berekenen;
- 2^o. Bij het controleeren van een met formules uitgevoerde berekening;
- 3^o. Wanneer een formule in een onrustige omgeving (bij montage, in de fabriek, op een bouwwerk) moet worden toegepast;
- 4^o. Wanneer eenzelfde betrekking herhaaldelijk wordt gebruikt;
- 5^o. Wanneer fabrieksarbeiders, uitvoerders of lagere beambten een formule moeten gebruiken, ook al zou de berekening daarmede zeer eenvoudig wezen;
- 6^o. Indien er verlangd wordt, dat de voorstelling van de betrekking, een snel overzicht over het verloop daarvan, toelaat.

Het is daarom gewenscht deze schaalnomogrammen, al naar het doel dat ermede beoogd wordt, op te nemen in:

- a. technische leer- en handboeken, c.q. ter aanvulling van de voorstelling, van — reeds op andere wijze weergegeven — betrekkingen;

- b. technische voorschriften voor het lagere personeel;
- c. vademecums;
- d. losbladige mappen, waarbij dus de gebruiker zelf de keuze en volgorde der daarin bijeen te voegen schaalnomogrammen kan bepalen.

In de ons omringende landen verschenen in het laatste decennium tal van werken over Nomografie. ¹⁾ Ook ten onzent ontstond meer en meer de behoefte aan een Nederlandsch leerboek over dit onderwerp.

Ik hoop daarom met het schrijven van het vóór U liggende werk, er in geslaagd te zijn een leerboek samen te stellen, dat tevens een handboek zal kunnen wezen voor *de constructie van schaalnomogrammen voor betrekkingen met drie veranderlijken*.

Ik heb mij om verschillende redenen, tot dit — wel is waar zeer belangrijke — gedeelte van de Nomografie beperkt. ²⁾

Door den oorspronkelijken opzet verschilt het werk in velerlei opzichten van de bekendste buitenlandsche werken over Nomografie (d'Ocagne, Soreau, Schwerdt, Werkmeister), o.a. vestig ik de aandacht op den systematischen opbouw van de taak der Nomografie en van de eenvoudigste grafische voorstellingswijzen; op het daarbij gegeven vergelijkende voorbeeld; op de verkorte logaritmische harp, de overzichtelijke indeeling van de functievergelijkingen en nomogramvormen; op de formules voor projectieve verbetering van nomogrammen en de projectieve constructie van het kegelsnede-nomogram. Voorts op de scheiding der veranderlijken in de algemeene functievergelijking van de 3e orde door toepassing van de *stelling van Menelaos*, en op de voorstelling van grensbetrekkingen, met het daarbij op uitvoerige wijze behandelde voorbeeld van d'Ocagne over het grondverzet bij den aanleg van wegen.

Menigmaal ontbraken Nederlandsche benamingen voor de ingevoerde begrippen en was het mijn taak nieuwe te scheppen. Ik hoop daarbij het juiste woord op de juiste plaats te hebben gebezigd.

Van den lezer wordt slechts de kennis der lagere Wiskunde

¹⁾ Zie het Literatuuroverzicht op blad. 257.

²⁾ De volgende onderwerpen blijven o.a. nog ter bespreking over: De grafische voorstelling van betrekkingen met onvolledige veranderlijken; de opsporing van empirische formules; het gebruik van coördinatenpapier; de constructie van nomogrammen voor betrekkingen met méér dan drie veranderlijken en de constructie van rekenlijnen.

en van de beginselen der Analytische Meetkunde geëischt, voor eenige hoofdstukken is voorts kennis van de Projectieve Meetkunde ¹⁾ noodig.

De enkele gedeelten waar determinanten en differentiaal- en integraalrekening worden toegepast, kunnen — zonder dat dit stoort — desgewenscht overgeslagen worden.

Ik wil dit voorwoord besluiten met mijn hartelijken dank te betuigen aan de hoogleraren van de Technische Hoogeschool, die mij met hun raad en belangstelling ter zijde stonden, in het bijzonder aan Professor Ir. D. Dresden, die mij den moed gaf de taak van het schrijven van dit werk te aanvaarden en aan Professor Dr. H. Bremekamp voor diens raadgevingen na inzage van het manuscript en zijn steun bij het verwezenlijken van deze uitgave.

Voor opmerkingen, welke tot verbetering van het werk kunnen bijdragen, houd ik mij aanbevolen; in het bijzonder zal ik prijs stellen op het vernemen van practische voorbeelden van betrekkingen der 4e, 5e of 6e orde.

Ten slotte breng ik dank aan den uitgever van het boek, voor de zorgen daaraan besteed, waardoor het, zeker in dit opzicht, een vergelijking met de beste buitenlandsche werken over Nomenclografie kan doorstaan.

Bilthoven, Augustus 1930

J. C. G. NOTTROT.

¹⁾ Zie hiervoor het „Beknopt leerboek der Projectieve Meetkunde” door Dr. Hk. de Vries. Uitgave P. Noordhoff—Groningen 1923.



I N H O U D.

		Bladz.
	DEEL I. INLEIDING.	1
Hoofdstuk 1.	Historische ontwikkeling. Descartes, Analytische Meetkunde; Gunther, rekenliniaal; Buache, hoogtelijnen; Poncelet, Projectieve Meetkunde; Steiner, Dualiteitsbeginsel; Lalanne, Anamorphose; Chasles, Maurice d' Ocagne, Nomografie , Soreau.	1
Hoofdstuk 2.	Taak en wezen der Nomografie. Voorstellingswijzen, Primaire — en Secundaire voorstellingswijzen, Overgangen tusschen de voorstellingswijzen; Volledige en onvolledige veranderlijken, Soortveranderlijken.	5
Hoofdstuk 3.	Elementen der grafische voorstellingswijzen. Bereik van een veranderlijke; Genummerd punt en genummerde lijn; Schaal en bundel.	10
Hoofdstuk 4.	De voorstelling van een betrekking tusschen twee veranderlijken. Waardenstel; Grondfiguur, Schalenstel en net; Raakkromme en snijkromme, Dubbelschaal. Voorbeeld: $h = \frac{v^2}{2g}$.	14
Hoofdstuk 5.	De voorstelling van een betrekking tusschen drie veranderlijken. Bundel raakkrommen op een schalenstel; bundel snijkrommen op een net; drie schalen; drie bundels rechten.	18

	Bladz.	
Voorbeeld: Verlichting.	18	
Tabel I: Overzicht der eenvoudigste grafische voorstellingswijzen	19	
Hoofdstuk 6. Het schaalnomogram tegenover de andere grafische voorstellingswijzen.	26	
Het Formaat, De Constructie, De Afwerking, Tijd, Overzicht, De Aflezing, Het Gebruik, Conclusie.		
—————		
DEEL II. FUNCTIESCHALEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN.	30	
Hoofdstuk 7. Veranderlijken, functies en functievergelijkingen.	30	
Absolute en relatieve bereik; Functie; Vergelijking of formule; Explicite en implicite functie; Vergelijking met gescheiden veranderlijken; Symmetrische betrekking; Functievergelijking.		
Hoofdstuk 8. Functieschalen.	33	
Oorsprong, Nulpunt, Kleinste en grootste functiewaarde, Functielengte of functiebereik; Keuze van den modulus.		
Voorbeeld: Functieschaal voor $\sqrt{z^3}$.		
Gebruik van een interpolator.		
Vergelijkende beschouwing van snijkromme en functieschaal.		
Voorbeeld: Gemiddelde groei van jongens.		36
Projectief verwante functieschalen, perspectieve ligging		39
Projectieve schaal		39
Macht-schalen		41
Logarithmische schaal		41
Bijzondere eigenschappen; Constructie; Logarithmische schaaleenheid; Logarithmische harp, Verkorte logarithmische harp.		
Onderlinge vergelijking van enkele functieschalen		46

	Bladz.
Hoofdstuk 9. Dubbelschalen.	49
Gebonden en vrije dubbelschalen.	
Constructie.	
Voorbeelden: 7 dubbelschalen.	51
Hoofdstuk 10. Indeeling van functievergelijkingen naar hunne Nomografische orde.	55
Bijzondere of typische functievergelijkingen; Scheiden van de veranderlijken; Algemeene functievergelijking; Nomografische orde; Algemeene functievergelijking van een orde.	
Tabel II: Nomogramvormen en bijzondere en algemeene functievergelijkingen.	56
Opgaven 1 tot en met 21 voor de constructie van dubbelschalen.	59

DEEL III. DE CONSTRUCTIE VAN SCHAALNOMOGRAMMEN VOOR BETREKKINGEN MET DRIE VERANDERLIJKEN. 61

A.

Nomogrammen op een recht schalenstel. 61	
Hoofdstuk 11. Algemeene inleiding. Dualiteit van grafische voorstellingen.	61
Indeeling van nomogramvormen; Dualiteit bij de grafische voorstelling van waarden, veranderlijken en betrekkingen.	
Hoofdstuk 12. Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel.	64
Type I: De derde schaal is een kromme schaal.	
$f_1 g_3 + f_2 = f_3$	64
Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules; Constructie van $[z_3]$ door projectie; Verdere aanwijzingen voor de constructie.	
Voorbeeld: Tweede wet van Kepler. (Wet der perken).	69

Bladz.

Type II. De derde schaal is een snijden-
de rechte schaal.

$f_1 g_3 + f_2 = 0$ 70

Functievergelijking; Constructieformules; Constructie van $[z_3]$ door projectie; Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Voorbeeld: *Samengestelde interest* . . . 73

Type III: De derde schaal is een evenwijdige rechte schaal.

$f_1 + f_2 = f_3$ 75

Functievergelijking; Constructieformules; Betrekking tusschen de drie moduli; Evenredigheidsteeken; Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Voorbeeld: *Stroomsnelheid in kanalen*. . . 78

Stelsel betrekkingen van Type III met twee gemeenschappelijke veranderlijken. Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen. 82

Afleiding van de constructieformules; Grafische bepaling van m ; Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Voorbeeld: *Berekening van cilindrische schroefveeren*. 85

Type Ia: De derde schaal ligt op een cirkelboog. 88

Afleiding van de constructieformules.

Voorbeeld: *Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduwlengte*. 90

Hoofdstuk 13. **Nomogrammen op een snijdend schalenstelsel.** 94

Type IV: De derde schaal is een kromme schaal

$\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$ 94

Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules; Constructie van $[z_3]$ door projectie; Verdere aanwijzingen voor de constructie: 10. $[z_3]$ ligt tusschen $[z_1]$ en $[z_2]$, 20. $[z_3]$ is buitenschaal.

Voorbeeld: *Vervanging van gewone, capacitieve en inductieve weerstanden, bij overgang van parallel- tot serieschakeling.* 97

Type V: De derde schaal is een snijden-
de schaal.

$$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} \dots \dots \dots 101$$

Functievergelijking; Constructieformules; Betrekking tusschen de drie moduli en den hoek φ . Tweede nomogram met andere ligging van dezelfde schalen. Rechtstreeksche afleiding van de functievergelijking (V) met de stelling van Menelaos.

Voorbeeld: *Instellen zonder matglas.* . . 103

Type VI: De derde schaal is een rechte schaal door den oorsprong O.

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} \dots \dots \dots 106$$

Functievergelijking; Constructieformules; Betrekking tusschen de drie moduli en den hoek φ .

1e Voorbeeld: *Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen.* 107

2e Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* 108

Type IVa: De derde schaal ligt op een cirkelboog 109

Afleiding van de constructieformules.

Hoofdstuk 14. **Onderlinge herleiding van de behandelde functievergelijkingen.** 111

Tabel III. *Onderlinge herleiding van de bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde.* 112

Voorbeeld: *Dikte van houten schotbalken.* 113

Hoofdstuk 15. **Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen.** 114

Bewijs van de mogelijkheid van projectieve vervorming. Ruimtelijke perspectivische vervorming. Afleiding van de noodige formules.

Bladz.

Tabel IV: Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen. 119

Verlenging of verkorting der schaaldeelen bij projectieve vervorming. Projectieve verbetering van een nomogram op een evenwijdig schalenstel, wanneer een der evenwijdige schalen wél gunstig is, en dus zoo weinig mogelijk vervormd mag worden.

1e Voorbeeld: Dikte van platen of balken van gewapend beton, bij in rekening gebracht eigen gewicht. 123

2e Voorbeeld: Bepaling der hoekcorrectie bij indirect gericht vuur. 128

Projectief vervormde nomogrammen, waarbij de derde schaal op een cirkelboog ligt. 132

Afleiding van de constructieformules.

Voorbeeld: Betrekking in den driehoek. 133

Opgaven 22 tot en met 85 voor de constructie van nomogrammen van de 3e orde. 138

Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen. (Opgaven 79 tot en met 85) 146

Opgaven 86 tot en met 118 voor de constructie van nomogrammen van de 4^o orde. 147

Nomogrammen van de 4^o orde met cirkelboogvormige [z₃]. (Opgaven 100 tot en met 118) 150

B.

Nomogrammen op een gebogen schalenstel. 154

Hoofdstuk 16. **Algemeene inleiding.** 154

Gebruik van een recht hulpschalenstel; Indeeling van nomogramvormen.

Hoofdstuk 17. **Nomogrammen op een gebogen schalenstel met afzonderlijke dragers.** 156

Type VII: De derde schaal is een kromme schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3} 156$$

Afleiding van de functievergelijking; Constructieformules; Vereenvoudigde constructieformules; Snijdend hulpschalenstel.

Type VIII: De derde schaal is een rechte schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = f_3. \dots \dots \dots 159$$

Functievergelijking; Constructieformules; Vereenvoudigde constructieformules; Herleiding tot een gunstiger vergelijking.

Hoofdstuk 18. **Nomogrammen op een gebogen schalenstel met een gemeenschappelijken draager van willekeurigen vorm.** 161

Type VII a: De derde schaal is een kromme schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = \frac{f_2 - f_3}{F(f_2) - F(f_3)}. \dots \dots \dots 161$$

Type VIII a: De derde schaal is een rechte schaal.

$$\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = f_3. \dots \dots \dots 161$$

Functievergelijkingen; Dubbelschaal $f_1 = f_2$ op den gemeenschappelijken draager; Goniometrische herleiding van type (III) tot type (VIIIa); Constructieformules.

Voorbeeld: *Stroomsnelheid bij vrije uitstrooming door een rechthoekige opening* 163

Hoofdstuk 19. **Kegelsnede-nomogrammen. Type IX.**

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0. \dots \dots \dots 165$$

Functievergelijking. 165

Projectieve vorming van het kegelsnedenomogram 165

Afleiding van functievergelijking en constructieformules; Benodigde gegevens; Symmetrie van de gegevens.

Cirkelnomogrammen. 171

Projectieve vorming van kegelsneden. . . 173

Bijzondere voorstellingswijze met behulp van tangenslijnen; Bijzondere punten van een tangenslijn; Bijzondere combinaties van pun-

	Bladz.
ten; Vier verschillende gevallen voor de ligging van twee tangenslijnen ten opzichte van elkaar.	
Voorbeeld: <i>Bepaling der afstandcorrectie bij direct gericht vuur.</i>	177
Verplaatsing van den oorsprong.	179
Voorbeeld: <i>Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.</i>	180
Projectieve constructie van het kegelsnedenomogram met een evenwijdig hulpschaalenstel	182
Cirkelnomogrammen	184
Voorbeeld: <i>Gemiddelde straal van een kanaal met taluds 1:1.</i>	184
Opgaven 119 tot en met 121 voor de constructie van nomogrammen van de 4e orde (kegelsnedenomogrammen).	187
Opgaven 122 tot en met 128 voor de constructie van nomogrammen van de 5e orde, type Villa	188
Hoofdstuk 20. Kegelsnedenomogrammen met rechte $[z_3]$.	189
Inleiding; Constructie van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$. Voordeelen van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$ ten opzichte van het nomogram met drie rechte schalen.	
1e Voorbeeld: <i>Wanddikte van buizen, cylinders en ketels met inwendigen overdruk</i>	191
2e Voorbeeld: <i>Electrische trillingen</i>	193
3e Voorbeeld: <i>Parallelschakeling van weerstanden. Serieschakeling van capaciteiten. Lenzen-formule</i>	196
Nadere beschouwing van de projectieve eigenschappen van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$	198
Bijzondere ligging van de rechte schaal.	198
Reciprokensomdrager, productdrager, somdrager; Regelmatige reciprokensomschaal,	

	Bladz.
-productschaal en -somschaal; Bijzonder nomogram waarbij deze drie schalen geheel gelijk, en wel segmentair, zijn.	
Voorbeeld: Gemiddelden van a en b	202
Hoofdstuk 21. Kubische nomogrammen.	205
Theorie volgens Clark	205
Voorbeeld: $z_1 z_2 z_3 = 1$	206
Andere methode voor de afleiding van constructieformules	207
Voorbeeld: Verband tusschen toerental en omtreksnelheid	209
Opmerking.	
Voorbeeld: $x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = -144$	212

DEEL IV. SCHEIDING DER VERANDERLIJKEN.	214
Hoofdstuk 22. Inleiding.	214
Algemeene functievergelijking; Algemeene functievergelijking van een orde.	
Hoofdstuk 23. 5e en 6e orde.	
Algemeene functievergelijking (a)	215
Lineaire betrekkingen tusschen de twee functies van een of twee der veranderlijken. Gelijkluidende betrekkingen tusschen de twee functies van twee of drie veranderlijken.	
Hoofdstuk 24. 4e orde.	217
Algemeene functievergelijking (b)	217
Voorbeeld: Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren	218
Herleiding van een vergelijking type IX tot een nieuwe vergelijking van dat type; Directe methode van Soreau voor het afleiden van de functie $z_1 = \varphi(f_1)$; Voorbeeld.	

Bladz.

Algemeene functievergelijking (c) . . . 220

Voorbeeld: *Herleiding van een vergelijking type VII tot type I of IV, wanneer in VII:*

$$g_1 = a_1 f_1 + b_1 \text{ en } g_2 = a_2 f_2 + b_2 . . . 222$$

Hoofdstuk 25. **3e orde.**

Algemeene functievergelijking (d) . . . 224

1^o. Scheiding van de veranderlijken met behulp van formules, verkregen door toepassing van de stelling van Menelaos . . . 224

Tabel V: *Scheiding van de veranderlijken*

$$\text{in } B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0,$$

waarin B_1, B_2 en $B_3 \neq 0$ 227

1e Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* 228

2e Voorbeeld: *Herleiding van*

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + (A f_3 + B) = 0$$

tot de typen II, III, V of VI 230

3e Voorbeeld: *Herleiding van*

$$f_3 = \frac{af_1 + bf_2}{cf_1 + df_2} \text{ tot type II} 231$$

2^o. Scheiding van de veranderlijken met behulp van de algemeene functievergelijking (c) 232

Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* 233

3^o. Scheiding van de veranderlijken door differentieeren ten opzichte van f_1, f_2 en f_3 233

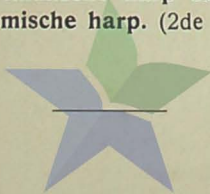
Voorbeeld: *Instellen zonder matglas* 235

DEEL V. **AANVULLENDE HOOFDSTUKKEN.** 237

Hoofdstuk 26. **Voorstelling van grensbetrekkingen door stop-, toegangs- en waarschuwinglijnen.** 237

Grensbetrekking; Stoplijn en toegangslijn; Waarschuwinglijn.

	Bladz.
1e Voorbeeld: Berekening van ronde vurenhouten stutten	239
2e Voorbeeld: Grondverzet bij den aanleg van wegen	241
Gebezigde notaties; Afleiding van de voor te stellen betrekkingen; Overzicht van de zes mogelijke gevallen, bepaling van de ligging der stop- en waarschuwingslijnen.	
Hoofdstuk 27. Nomogrammen met gebroken schalen.	248
Scheidingswaarde; Gebroken schaal; Overzicht van nomogramvormen met één gebroken schaal op een evenwijdig schalenstel.	
Voorbeeld: Doorslaan van ijzeren constructies met brisante springstof	250
Hoofdstuk 28. Benodigde gegevens voor de constructie van een nomogram. Eenige opmerkingen en aanwijzingen.	253
Benodigde gegevens; Frequentiekromme; Normale en totale bereik; Verdeeling van voorkomende betrekkingen over de verschillende orden; Keuze der veranderlijken; Enkele aanwijzingen voor het teekenen van nomogrammen. Reproductie.	
—	
Literatuur	257
Gebruikte notaties en teekens	259
Grieksch alfabet	261
Systematisch overzicht van de voorbeelden en opgaven	262
Alfabetisch register	265
Logarithmische harp en verkorte logarithmische harp. (2de ex.)	272



DEEL I. INLEIDING.

HOOFDSTUK 1.

Historische ontwikkeling.

§ 1. DESCARTES (1596—1650), de groote Fransche wijsgeer en wiskundige, vestigde zich, aangetrokken door de meerdere geestelijke vrijheid welke hij hier kon genieten, in 1629 in Holland en gaf er in 1637 te Leiden zijn „*Géométrie*” uit.

In dit werk paste hij, zij het op nog zeer verscholen wijze, bij de studie der klassieke kromme lijnen, algebraïsche begrippen en methoden toe en legde daarmede de grondslagen voor een nieuwe tak der wiskunde, de *Analytische Meetkunde*.

De kern daarvan is de vastlegging van de ligging van een punt in een vlak door de „*coördinaten*”, van een lijn in een vlak door de „*vergelijking van die lijn*”.

Van een ander standpunt bezien, kan gezegd worden dat Descartes (Lat. naam: Cartesius) aan de bestaande voorstellingswijzen voor een betrekking, *tabel en vergelijking*, een nieuwe, n.l. de *meetkundige voorstelling*, heeft toegevoegd. In het platte vlak beperkte hij zich echter nog tot betrekkingen tusschen twee veranderlijke grootheden, welke dus in het algemeen door een enkele kromme lijn werden voorgesteld.

§ 2. Eerder, in 1620 reeds, had de Engelschman GUNTHER, van Gresham's College te Oxford, de logaritmen van Napier (1614) en Briggs (1618) door een *logarithmische schaal* voorgesteld en daarmede zijn *rekenliniaal* ontworpen.

Nadat BUACHE in 1737 voor het eerst hoogte- en dieptelijnen had geteekend in zijn geografische kaarten en daarmede feitelijk den *bundel* krommen als grafische voorstelling had ingevoerd, werd deze geleidelijk ook op ander gebied toegepast.

§ 3. De eerste helft der volgende eeuw bracht een vernieuwing der meetkundige theorieën, welke voor de ontwikkeling der grafische voorstelling van groot belang zou blijken.

NOTTROT, *Leerb. der Nomografie*.

1

PONCELET (1788—1867) als genie-officier onder Napoleon den tocht naar Rusland medemakend, werd te Krasnoë gevangen genomen en getransporteerd naar Saratoff. Uitgeput en half ziek, slechts gehuld in de lompen van zijn uniform, moest hij, in de snerpende koude van den strengen winter 1812, te voet de lange dagmarschen volbrengen. In deze ellende klampte zijn geest zich vast aan wiskundige overpeinzingen, die hem voerden tot de beginselen der „*Projectieve Meetkunde*”, in 1822 neergelegd in zijn „*Traité des propriétés projectives des figures*”.

De Projectieve Meetkunde behandelt die eigenschappen van figuren, welke bij projectieve transformatie onveranderd blijven.

§ 4. Omstreeks denzelfden tijd werd het **Dualiteitsbeginsel** naar voren gebracht. Het eerst door GERGONNE in 1813 in de door hem opgerichte „*Annales des Mathématiques*”; ook MÖBIUS in zijn „*Barycentrische Calcul*” (1827) en PLÜCKER in de „*Analytisch-Geometrische Entwicklungen*” (1831) waren zich van het bestaan daarvan bewust, doch pas in de „*Systematische Entwicklung*” (1832) van STEINER is dat beginsel ten volle uitgebuit, waardoor het in de Projectieve Meetkunde de belangrijke plaats is gaan innemen, die het nog heden daarin vervult.

STEINER (1796—1863) was een arme boerenzoon uit het kanton Bern, die, hunkerend naar wetenschap, op 18-jarigen leeftijd van achter de koeien wegliep naar PESTALOZZI, die destijds in een school te Yverdon aan het meer van Neuchâtel zijn opvoedkundige idealen trachtte te verwezenlijken. Het vrije denken daar, bracht den, met een buitengewoon voorstellingsvermogen begaafden boerenjongen, tot een nieuwen opbouw van de Meetkunde, meer samenhangend met haar wezen dan de klassieke „*Elementen*” van Euclides en de analytische methoden van Descartes.

Twee jaar na het verschijnen van de „*Systematische Entwicklung*” werd aan de Berlijnsche hoogeschool voor Steiner een leerstoel opengesteld voor de Hoogere Meetkunde.

§ 5. De stellingen der Projectieve Meetkunde en het Dualiteitsbeginsel werden nog niet dadelijk voor de Nomografie benut.

Eerst werd nog de voorstelling van betrekkingen verbeterd door de toepassing der **Anamorphose**, — d.i. het strekken van den bundel krommen tot een bundel rechte lijnen —, door in plaats van de metrische coördinaten van Descartes, functies daarvan op het assenstelsel uit te zetten. Dit geschiedde in 1843 door LALANNE ter berekening van de vergravingen voor den aanleg van het eerste Fransche spoorwegnet. Hij teekende daartoe grafieken bestaande

uit een bundel rechten op een logaritmisch net; op een net dus, verkregen door de kruising van twee bundels, elk evenwijdig aan een der assen en de andere as snijdend volgens een logaritmische schaal. (*Logarithmische Anamorphose*).

§ 6. Het werk van den Franschen wiskundige CHASLES (1793—1880) bracht tenslotte MAURICE D'OCAGNE in 1884 tot de toepassing van de duale of reciproke transformatie en het gebruik van tangentele coördinaten bij de voorstelling van betrekkingen. (1884. „*Coördonnées parallèles et axiales*”).

De naam **Nomografie** is van hem afkomstig als de aanduiding van de wetenschap, welke zich de studie van de grafische voorstelling van vergelijkingen met een willekeurig aantal veranderlijken ten doel stelt. Het overgrootste deel van die studie wordt in zijn „*Traité de Nomografie*” (2me éd.-1921) gewijd aan de „*Nomogrammes à points alignés*”, de, voornamelijk uit schalen opgebouwde grafieken, waarin elke collineatie van schaalpunten een oplossing van de voorgestelde vergelijking geeft.

In het laatste decennium zijn meerdere werken op Nomografisch gebied verschenen. Wij verwijzen daarvoor naar het literatuuroverzicht, doch vestigen behalve op het bovengenoemde werk van d'Ocagne, in het bijzonder de aandacht op de „*Nomografie ou Traité des Abaques*” van R. SOREAU, dat als het beste werk over Nomografie kan worden beschouwd.

In ons land heeft IR. F. J. VAES zich veel moeite gegeven om voor het werk van d'Ocagne en voor de Nomografie in het algemeen belangstelling te wekken, terwijl in 1926 mijn vroegere leeraar J. W. N. LE HEUX het eerste Nederlandsche werkje over Nomografie heeft doen verschijnen. Als practische toepassing zijn de in 1920 door de Vereeniging van Waterstaatsingenieurs uitgegeven „*Grafieken voor hydraulische Berekeningen*” van den jonggestorven IR. J. M. STEEVENSZ van belang.

§ 7. In zijn bovengenoemd boek heeft Soreau ten opzichte van d'Ocagne de taak van de Nomografie verruimd; in de eerste plaats doelt hij niet op de voorstelling van vergelijkingen alleen, maar in 't algemeen op de voorstelling van betrekkingen tusschen veranderlijken; in de tweede plaats rekt hij ook het opsporen van formules voor empirisch gevonden betrekkingen tot de taak der Nomografie.

Hiermede gaat evenwel, bij gemis van een gemeenschappelijk logisch fundament, de eenheid van het behandelde min of meer verloren.

Nog meer is dat het geval in die werken, welke *de grafische voorstelling in het algemeen* tot onderwerp hebben. Daarin wordt, behalve de grafische voorstelling van vergelijkingen, ook het grafisch weergegeven behandeld van betrekkingen, welke gewoonlijk niet door een vergelijking worden, of daardoor zelfs niet kunnen worden voorgesteld.

Daar tóch de samenhang van die verschillende onderwerpen klaarblijkelijk door velen wordt gevoeld, zal in het volgende hoofdstuk getracht worden de grondslagen der Nomografie opnieuw op te bouwen.



HOOFDSTUK 2.

Taak en wezen der Nomografie.

§ 8. Het uit het Grieksch afgeleide woord *Nomografie*, beteekent letterlijk „beschrijving van wetten”, hetgeen dus in wiskundigen of natuurwetenschappelijken zin wil zeggen:

„de voorstelling van betrekkingen tusschen veranderlijken.”

Die voorstelling kan op eenige, naar hun aard zeer verschillende wijzen plaats hebben, n.l.:

- a. **algebraïsch** door een of meer **formules**;
- b. **rekenkundig** door een **tabel**;
- c. **meetkundig** door een **grafiek**;
- d. **taalkundig** door een woordelijke **omschrijving**.

Laatstgenoemde voorstellingswijze was, bij gebrek aan betere voorstellingsmiddelen — in de middeleeuwen, en ook later nog, — zeer gebruikelijk, doch is nu van weinig belang meer. Wij zullen haar daarom verder buiten beschouwing laten.

§ 9. Daar een betrekking niet anders dan uit een voorstelling er van, kan worden gekend, is voor elk verband tusschen veranderlijken steeds een bepaalde voorstellingswijze **primair**. Zoo is meestal de *formule of vergelijking* de primaire voorstelling voor theoretisch afgeleide betrekkingen, de *tabel* voor gemeten betrekkingen, de *grafiek* voor mechanisch opgeteekende betrekkingen.

Voor het verkrijgen van die primaire voorstelling, zorgt dus de wetenschap waartoe de betrekking behoort, zelf. **Daarentegen is het de taak der Nomografie, uit die primaire voorstelling de voor elk bijzonder geval gewenschte secundaire voorstellingswijze af te leiden.** Als primaire voorstelling moet daarbij ook beschouwd worden de empirische formule, die uit voor ons onbekende gegevens werd gevonden.

§ 10. Figuur 1 geeft een schematisch overzicht van de in de practijk meest voorkomende overgangen en hun aandeel in de Nomografie. (Dit laatste aangegeven door de dikte der pijlen).

ad a. Voor de toepassing van technische en wetenschappelijke formules, worden daaruit rechtstreeks nauwkeurige grafieken geconstrueerd. Die grafieken kunnen bestaan uit bundels lijnen, waarbij van in den handel verkrijgbaar coördinatenpapier gebruik kan worden gemaakt, dan wel uit een combinatie van schalen. Zijn de laatste ten opzichte van elkander verschuifbaar, dan kan de grafiek uitgevoerd zijn in den vorm van een rekenliniaal.

ad b. Om een overzicht te verkrijgen over het verloop van een betrekking, welke gegeven is in den vorm van een tabel, worden

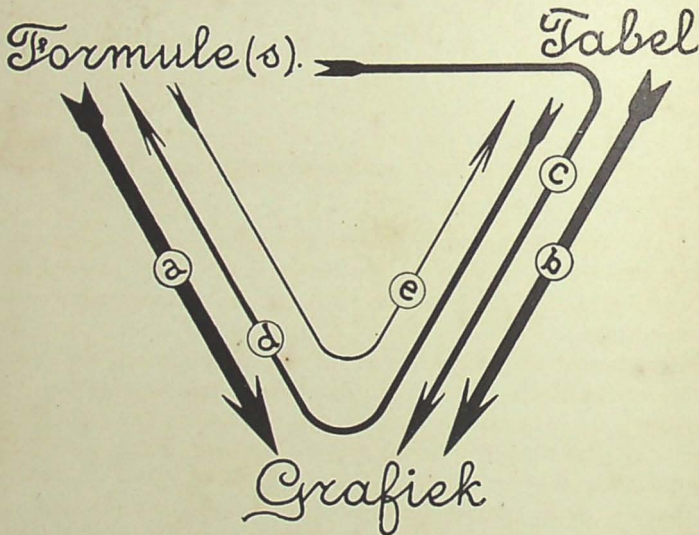


Fig. 1.

de waarden daarvan uitgezet op millimeter-, poolcoördinaten-, logaritmen- of ander coördinatenpapier, zóó, dat daarop een of meer krommen worden verkregen. Men noemt deze krommen wel *karakteristieken*, omdat zij den aard van de betrekking duidelijk doen uitkomen.

Soms kan ook op andere wijze een figuurlijke voorstelling van de betrekking worden geteekend.

ad c. Is het bij de grafische voorstelling van een formule, niet alleen om de toepassing, maar ook om een overzicht over het verloop van de betrekking te doen, of is het niet mogelijk rechtstreeks een grafiek af te leiden, dan zal eerst een tabel moeten worden vervaardigd en de berekende waarden in een grafiek worden uitgezet.

ad d. De afleiding van empirische formules uit een tabel van gegevens, heeft meestal plaats, door te trachten het gegeven verband zoodanig in een grafiek vast te leggen, dat een voorstelling verkregen wordt, bestaande uit een rechte lijn of een bundel rechte lijnen op een of ander coördinatennet.

De aldus verkregen empirische formule kan het spoor aanwijzen voor de redeneering, welke moet worden gevolgd, om tot een theoretisch afgeleide formule te komen.

Soreau noemt het opsporen van empirische formules: „*La recherche des lois*”.

ad e. Moet een tabel berekend worden uit een formule, dan zal, wanneer een niet al te groote nauwkeurigheid wordt vereischt, veelal gebruik gemaakt worden van een grafiek op coördinatenpapier, of van een rekenliniaal. Zoo zal bij voorbeeld een formule, samengesteld uit een product van machten, op eenvoudige wijze gewaardeerd kunnen worden met een grafische voorstelling op logaritmenpapier.

§ 11. **Onvolledige veranderlijken.** In de studie van de genoemde overgangen is in hoofdzaak alles besloten wat in de onderscheidene werken over Grafische voorstellingen en Nomografie wordt behandeld.

Echter moet de beteekenis van het begrip „veranderlijken” dan niet beperkt blijven tot die van de *continue reële variabele* uit de wiskunde. Deze heeft de beteekenis van „*de veranderlijke grootheid, welke alle tusschen twee bepaalde grenzen gelegen reële waarden, kan aannemen.*”

Behalve deze variabele, welke een *veranderlijke naar het getal* is (*getalveranderlijke*), moeten dan onder het begrip „veranderlijke” nog eenige andere typen gerangschikt worden. Hiervan is de „*veranderlijke naar de soort*” het belangrijkste.

Soortveranderlijken zijn veranderlijken, die niet met verschillende waarden, doch met verschillende soorten in een betrekking optreden. Bij voorbeeld zijn de metaalsoorten: *zink, ijzer, koper*, enz. verschillende soorten van de soortveranderlijke: *metalen*. Andere voorbeelden zijn: brandstoffen (steenkolen, cokes, turf, enz.), staten (Nederland, Engeland, Duitschland, enz.), wegen (klinker-, steenslag-, betonwegen, enz.).

Tegenover de continue reële variabele, welke ik ook **volledige veranderlijke** zal noemen, vat ik de andere typen, welke in zekeren zin niet als „vol” gerekend kunnen worden, te zamen onder den naam **onvolledige veranderlijken**.

§ 12. Voornamelijk de volgende twee redenen rechtvaardigen de genoemde uitbreiding:

1°. In alle wetenschappen komen de onvolledige veranderlijken veelvuldig voor, voornamelijk in z.g. statistische betrekkingen.

2°. Er is geen scherpe afscheiding tusschen de continue reële variabele en de soortveranderlijke, maar er bestaan verscheidene overgangstypen. Een aantal geleidelijk van de reële variabele naar de soortveranderlijke in onvolledigheid toenemende veranderlijken zijn bijeen gebracht in de volgende reeks:

- a. het aantal meters van een lengte is een grootheid, waaraan wij **alle reële** positieve waarden kunnen toedenken (volledige veranderlijke);
- b. het aantal inwoners van een stad, — arbeiders van een fabriek — leden van een gezin, enz. Deze grootheid kan alleen de **geheele** positieve waarden aannemen;
- c. handelsmaten, als b.v. buiswijdten, draaddikten, enz., zijn grootheden, die slechts een **beperkt aantal** waarden kunnen hebben;
- d. de jaren (b.v. 1930, 1931, enz.). Hierbij is geen sprake meer van waarden, maar van een reeks **nummers**;
- e. de maanden, de dagen, e.d. De nummers zijn hier vervangen door **soortnamen**;
- f. levensperiodes (kind, jongeling, man, grijsaard), burgerlijken staat (ongetrouwd, getrouwd, gesch. of wed.). In deze soorten is, evenals in het vorige geval, een natuurlijke volgorde naar den tijd;
- g. ook van andere soortveranderlijken zijn de soorten dikwijls, naar de een of andere maatstaf, in volgorde te rangschikken. (b.v. hemelstreken, scheikundige elementen, kleuren, enz.).

Uit het voorgaande blijkt dat een veranderlijke kan optreden als een **waarde**, een **nummer** of een **soort**. Ter gemeenschappelijke aanduiding kunnen wij spreken van de **data** van een veranderlijke.

§ 13. In dit boek zal de voorstelling van betrekkingen met onvolledige veranderlijken niet uitvoerig behandeld worden. In de af te beelden betrekkingen zullen wel eens een enkele maal onvolledige veranderlijken voorkomen, zonder dat daar in 't bijzonder op behoefte te worden gelet.

Een enkel voorbeeld volge evenwel nog ter toelichting.

- 1°. De formule voor het totaal aantal stuks **S** van een lang-

werpige pyramidale stapel met x stuks langs de korte basis en n stuks langs den bovenkam, is

$$S = \frac{x(x+1)(2x+3n-2)}{6}.$$

Hierin zijn x , n en S allen onvolledig veranderlijken, want zij kunnen alleen geheele waarden aannemen.

2°. In een tabel van den uitvoer van verschillende producten voor een reeks jaren, is dus een betrekking voorgesteld tusschen het jaar (nummer), de soort van het product (soortveranderlijke) en de uitgevoerde hoeveelheid (volledige veranderlijke).



HOOFDSTUK 3.

Elementen der grafische voorstellingswijzen.

§ 14. Voor elke betrekking is het mogelijk meerdere grafieken, in een groote verscheidenheid van vormen, te construeeren.

Stellen wij echter de voorwaarde, dat zoowel constructie als gebruik, zoo eenvoudig mogelijk moeten wezen, dan is het niet moeilijk te bepalen, op welke wijze de meest geschikte grafische voorstellingen verkregen zullen worden.

Voor de voorstelling van een betrekking tusschen veranderlijken is in de eerste plaats een voorstelling van die veranderlijken zelf noodig.

Notaties: Als symbool voor een veranderlijke bezigen wij in het algemeen de letter *z*, zijn er meerdere veranderlijken, dan kan zij voorzien worden van een index, b.v. z_1, z_2 , enz. Wij spreken dan van de 1e veranderlijke, de 2e veranderlijke, enz. Ook kan voor de aanduiding de letter gebruikt worden, met welke de veranderlijke in een formule voorkomt.

Het bereik van een volledige veranderlijke bestaat uit een on-eindig aantal waarden.

Bepalen wij ons tot de af-beelding in een plat vlak, dan kan elke waarde worden voorgesteld:

- a. door een genummerde punt
- b. door een genummerde lijn

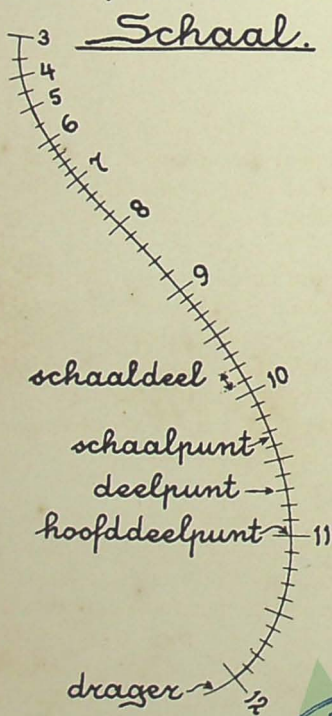


Fig. 2.



d.w.z. dat aan het punt of de lijn de betreffende waarde als nummer toegedacht wordt.

De voorstelling der waarden door genummerde punten, voert, voor de voorstelling van de veranderlijke, practisch tot een **schaal** (figuur 2), de voorstelling door genummerde lijnen levert aldus een **bundel** (figuur 3).

§ 15. Bij de **schaal** (figuur 2), die recht of gebogen kan zijn, hebben wij een aaneensluitende reeks punten, die dus te zamen een rechte of gebogen lijn vormen.

Bij elk punt behoort een waarde, een aantal ronde waarden wordt door een kort deelstreepje aangeduid, bij eenige daarvan wordt de waarde zelf bijgeschreven.

Notaties: Een schaal voor een veranderlijke wordt aangeduid door de veranderlijke, geschreven tusschen twee *rechte* haken, bij voorbeeld [z₁].

Benamingen: Elk punt van een schaal heet *schaalpunt*; elk door een deelstreepje aangeduid schaalpunt heet *deelpunt*, elk deelpunt waarbij de waarde is bijgeschreven heet *hoofddeelpunt*. De gebogen of rechte lijn wordt *drager* genoemd, de gedeelten tusschen twee deelstreepjes heeten *schaaldeelen*.

Het aantal hoofddeelpunten moet zoodanig zijn, dat met een enkele oogopslag te zien is, welke waarde aan een willekeurig deelpunt moet worden toegekend. Om te bepalen, welke waarde bij een willekeurig schaalpunt, of omgekeerd, welk schaalpunt bij een willekeurige waarde behoort, moeten wij z.g. **interpoleeren**. Wanneer de opvolgende schaaldeelen niet zichtbaar in lengte verschillen, mag die interpolatie eenvoudig naar evenredigheid geschieden.

§ 16. Het meest bekende voorbeeld van een schaal is de gewone centimeterverdeeling op een rechte liniaal of meetlat.

Wij noemen dit een **metrische schaal** en rekenen haar steeds van nul af te beginnen. Het met nul genummerde schaalpunt heet daarom de **oorsprong**.

Zijn alle deelen van een schaal even lang, dan noemen wij deze een **regelmatige schaal**. De **metrische schaal** is hiervan dus een bijzonder geval.

Zijn de opvolgende schaaldeelen verschillend van grootte, dan is de schaal **onregelmatig**.

Alle schalen, die niet **metrisch** zijn, heeten **functieschalen**. Hoewel dus in het algemeen ook de regelmatige schaal daartoe behoort,

hebben wij, met de benaming functieschalen, voornamelijk onregelmatige schalen op het oog. In figuur 17 zijn eenige functieschalen afgebeeld. Op de constructie van functieschalen komen wij nog uitvoerig terug.

§ 17. Een **bundel** (figuur 3) is dus een reeks rechte of kromme lijnen, bij elk waarvan een waarde behoort. Slechts een aantal ronde

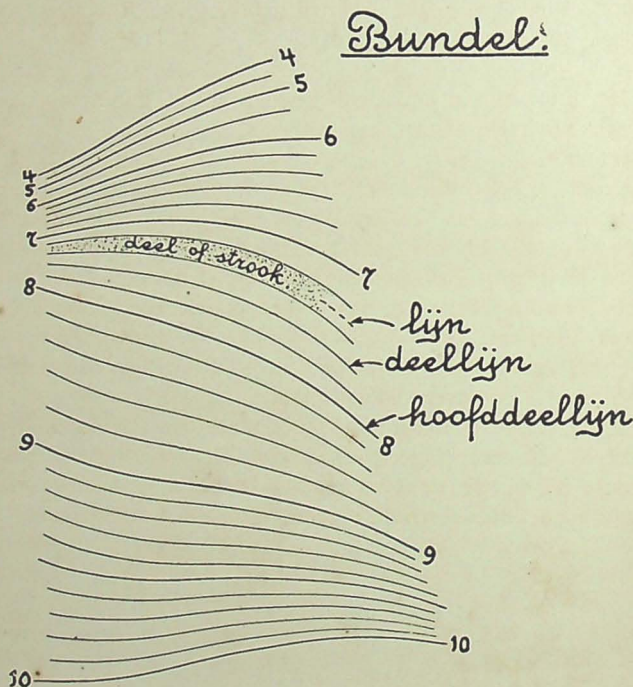


Fig. 3.

waarden worden door een geteekende lijn voorgesteld, aan de tusschengelegen waarden, moet zoowel een lijn, als een nummer toegedacht worden.

Van de lijnen zijn er slechts enkele, waarbij de waarde is bijgeschreven. De voornaamste daarvan worden bovendien door grootere dikte meer onder de aandacht gebracht.

Notaties: Een bundel voor een veranderlijke wordt aangeduid, door de veranderlijke te schrijven tusschen twee *gebogen* haken, bij voorbeeld (z_1).

Benamingen: Met *lijnen* worden ook de niet in werkelijkheid getrokken lijnen van den bundel bedoeld. Een werkelijk getrokken lijn heet *deellijn*. Elke deellijn waarbij de waarde is bijgeschreven heet *hoofddeellijn*. De oppervlakken tusschen twee deellijnen heeten *deelen* of *strooken*.

Het aantal genummerde lijnen moet weer zoodanig zijn, dat met één oogopslag te zien is, welke waarde aan een willekeurige deellijn moet worden toegekend. Interpolatie mag, wanneer ter plaatse de breedte der opvolgende strooken niet zichtbaar verschilt, naar evenredigheid plaats hebben.

§ 18. Bestaat een bundel uit kromme lijnen, dan spreken wij van een **bundel krommen**, zijn alle lijnen recht, dan is het een **stralenbundel**.

Gaan die rechten allen door één punt (*toppunt* of *pool* geheeten), dan is de bundel een **waaier**. Wij noemen deze een *regelmatige waaier*, wanneer hij zoo door een transversaal kan worden gesneden, dat daarop een regelmatige schaal wordt afgeteekend, — en een *cirkelwaaier*, wanneer de naast elkander gelegen sectoren gelijke tophoeken bezitten.

Ligt het gemeenschappelijke punt in het oneindige, dan gaat de waaier over in een **evenwijdigen bundel**.

Een lijn, welke loodrecht staat op de lijnen van een evenwijdigen bundel, snijdt deze volgens een schaal. Naar gelang die schaal metrisch, regelmatig, dan wel een functieschaal is, heet de evenwijdige bundel ook **metrisch**, **regelmatig** of een **functiebundel**.



HOOFDSTUK 4.

De voorstelling van een betrekking tusschen twee veranderlijken.

§ 19. Bestaat er tusschen twee veranderlijken een betrekking, dan behoort bij elke waarde van de ééne, een waarde van de andere veranderlijke. (We nemen hier het eenvoudigste geval van éénwaardige functies aan).

Zulk een combinatie van waarden noemen wij in 't algemeen een **waardenstel**.

Voor het in beeld brengen van de betrekking is een **grondfiguur** noodig. Het eenvoudigste wordt deze gevormd op een van de twee volgende wijzen:

- a. door twee naast elkander geplaatste schalen, te zamen een **schalenstel** vormend.
- b. door twee elkander snijdende bundels, welke te zamen een **net** vormen.

De koppeling van twee waarden tot een waardenstel, wordt dan op een *schalenstel* voorgesteld door de *rechte verbindingslijn* van de twee schaalpunten, op een *net* door het *snijpunt* van de twee lijnen voor de bedoelde waarden.

§ 20. De betrekking, d.w.z. het oneindig aantal waardenstellen, wordt ten slotte weergegeven:

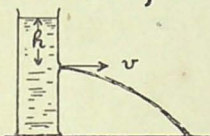
- a. op het *schalenstel*, door een oneindig aantal rechten. In het algemeen omhullen deze een kromme (figuur 5). Practisch bestaat dus de voorstelling uit een schalenstel met een z.g. **raakkromme** (Duitsch: Gleitkurve, zie Schwerdt). De aflezing heeft plaats door een rechte afleeslijn rakend aan de kromme te leggen;
- b. op het *net*, door een oneindig aantal snijpunten, te zamen in het algemeen een kromme vormend, welke hier **snijkromme** genoemd zou kunnen worden. (figuur 4).

Het is niet mijn bedoeling het bovenstaande, voor zoover dit de voorstelling van betrekkingen tusschen twee veranderlijken betreft, nader uit te werken.

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \text{of} \quad v = \sqrt{2gh}$$

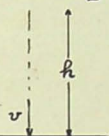
waarin g = versnelling door de zwaartekracht; tusschen 44° en 55° breedte is $g = 9,81$ meter per sec^2 .
De betrekking geldt voor:

Uitstrooming van vloeistof.



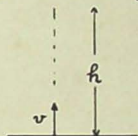
v = theor. stroom-
-melheid in m/sec .
 h = drukhoogte in m.

Vrije val in 't luchtledige.



h = valhoogte in m.
 v = eindsnelheid in m. per sec.

Verticale worp in 't luchtledige.



v = beginsnelheid in m. per sec.
 h = stijg-hoogte in m.

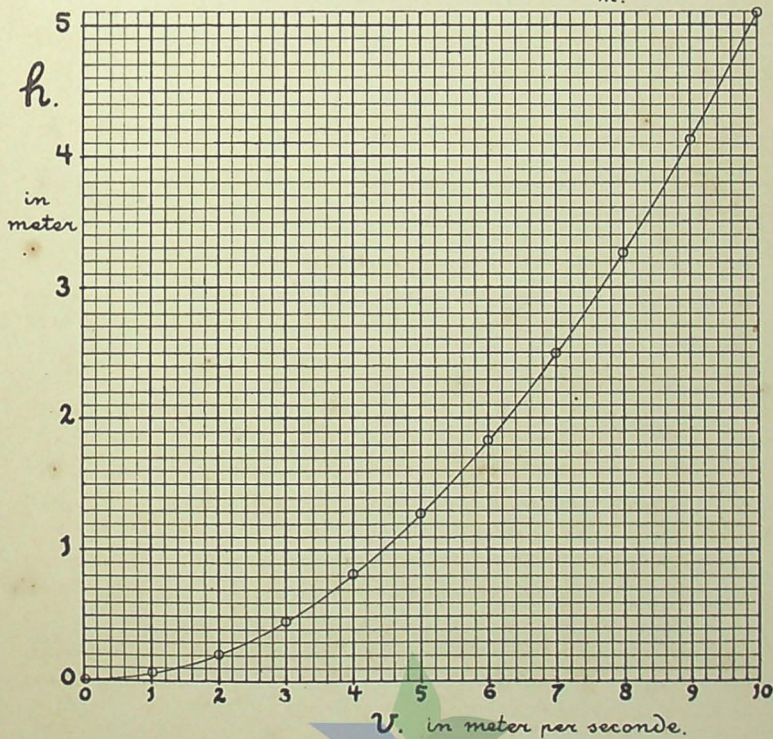


Fig. 4.

Ter toelichting van het zoeven behandelde, zijn in de figuren 4 en 5 voorbeelden van de twee voorstellingswijzen gegeven. De in figuur 4 met een klein cirkeltje aangeduide waardenstellen, zijn in figuur 5 met stippellijnen aangegeven.

Een net, als in figuur 4, hetwelk uit twee regelmatige evenwijdige bundels is opgebouwd, heet een *regelmatig net*. Het uit twee evenwijdige rechte regelmatige schalen gevormde schalenstel van figuur 5 noemen wij een *regelmatig evenwijdig schalenstel*.

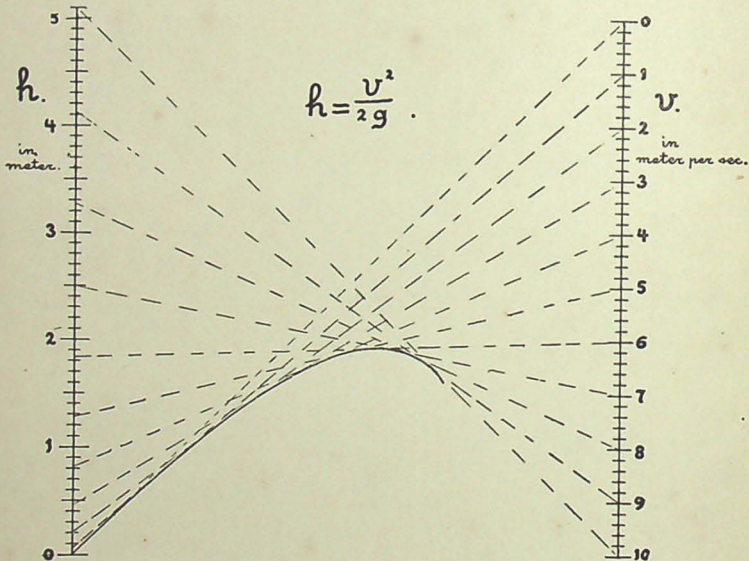


Fig. 5.

§ 21. Wanneer het schalenstel en het net, niet uit regelmatige schalen en bundels, maar respectievelijk uit functieschalen en functiebundels worden opgebouwd, dan is het mogelijk deze zóó te kiezen, dat de raakkromme overgaat in een enkel punt en de snijkromme gestrekt wordt tot een rechte lijn. Voorbeelden daarvan zullen wij later ontmoeten.

Notaties: Een schalenstel voor een stel van twee veranderlijken, wordt aangeduid, door die veranderlijken samen te schrijven tusschen twee rechte haken, bijvoorbeeld $[z_1, z_2]$, een net op dezelfde wijze, doch met gebogen haken, dus bijvoorbeeld (z_1, z_2) .

Bij de voorstelling door een enkel punt op een schalenstel, kunnen wij echter ook, met dit punt als projectiecentrum, de ééne schaal op

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

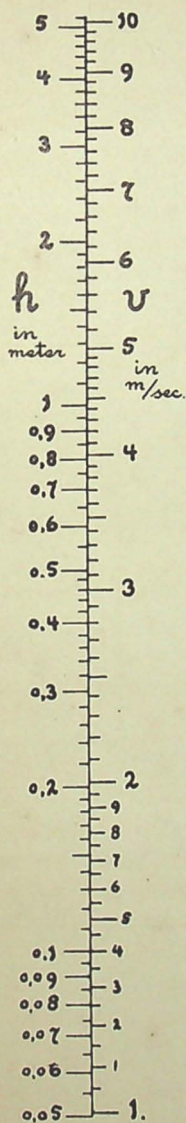


Fig. 6.

de andere projecteeren. De bijeenbehoorende waarden van elk waardenstel vallen nu juist op elkaar. De twee schalen komen dan met hun verdelingen onderscheidenlijk links en rechts van den gemeenschappelijken drager.

Deze voorstellingswijze van een betrekking tusschen twee veranderlijken heet **dubbelschaal** (figuur 6).

De constructie van dubbelschalen zal bij de behandeling der functieschalen nog nader worden besproken.

HOOFDSTUK 5.

De voorstelling van een betrekking tusschen drie veranderlijken.

§ 22. Een betrekking tusschen drie veranderlijken kan gesplitst worden in een oneindig aantal betrekkingen tusschen twee veranderlijken. Daartoe wordt de derde veranderlijke met oneindig kleine trapjes doorloopen van haar begin- tot haar eindwaarde. Op elk trapje is er dus een — telkens gewijzigde — betrekking tusschen de twee overige veranderlijken.

Wij zagen in het voorgaande hoofdstuk, dat een betrekking tusschen twee veranderlijken op een *schalenstel* kan worden voorgesteld door een **raakkromme**, óf, — bij keuze van toepasselijke functieschalen —, door een **punt**; evenzoo op een *net*, door een **snijkromme**, óf, — op een geëigend functienet —, door een **rechte lijn**.

Daaruit volgt, dat een betrekking tusschen drie veranderlijken in het algemeen zal kunnen worden voorgesteld:

- 1^o. door een *bundel raakkrommen op een regelmatig schalenstel*;
- 2^o. door een *bundel snijkrommen op een regelmatig net*;
- 3^o. door een *schaal op een functieschalenstel*, dus door **drie schalen**;
- 4^o. door een *bundel rechten op een functienet*, dus door **drie bundels rechten**.

De grafische voorstelling van een betrekking wordt, behalve **grafiek**, ook **nomogram** genoemd. De grafieken ad 3^o heeten **schalenomogrammen** (Fransch: Nomogrammes à points alignés; Duitsch: Fluchtlinientafeln), die ad 2^o en 4^o **bundelnomogrammen**.

In tabel I is de afleiding der besproken grafische voorstellingswijzen in een overzicht samengevat.

§ 23. **Voorbeeld.** *Verlichting* (figuren 7, 8, 9 en 10).

Ter onderlinge vergelijking van deze vier voorstellingswijzen, is in de figuren 7 tot en met 10 afgebeeld de betrekking:

$$L = \frac{100 \sin \alpha}{r^2}$$

TABEL I.

Overzicht der eenvoudigste grafische voorstellingswijzen.					
Een :	, wordt voorgesteld door een:				
waarde	genummerd punt		genummerde lijn		
waardenstel	rechte lijn (door de 2 punten)		snijpunt (van de 2 lijnen)		
veranderlijke	schaal (Fig. 2)		bundel (Fig. 3)		
stel van 2 veranderlijken	grondfiguur				
	schalenstel		net		
	regelmatig schalenstel	toepasselijk functie- schalenstel	regelmatig net	toepasselijk functienet	
betrekking tusschen 2 veranderlijken	raak- kromme (Fig. 5)	punt	snij- kromme (Fig. 4)	rechte lijn	dubbelschaal (Fig. 6)
betrekking tusschen 3 veranderlijken	bundel raak- krommen (Fig. 7)	schaal (Fig. 9) (dus 3 schalen)	bundel snij- krommen (Fig. 8)	bundel rechten (Fig. 10) (dus 3 bundels rechten)	

, voor het bepalen van de sterkte der verlichting, wanneer
 r = de afstand in meters van de lichtbron tot de plaats waar wij
de sterkte van de verlichting willen bepalen;

α = de invalshoek van het licht;

L = de sterkte van de verlichting in Lux per 100 kaars licht-
sterkte van de lamp.

Stel verder:

s = de horizontale schaduwlengthe van 1 meter hoogte, dan is

$$s = \cotg. \alpha$$

§ 24. De eerstgenoemde betrekking is in fig. 7 afgebeeld op
een regelmatig $[r, \alpha]$. Van de omstandigheid, dat de drager $[\alpha]$

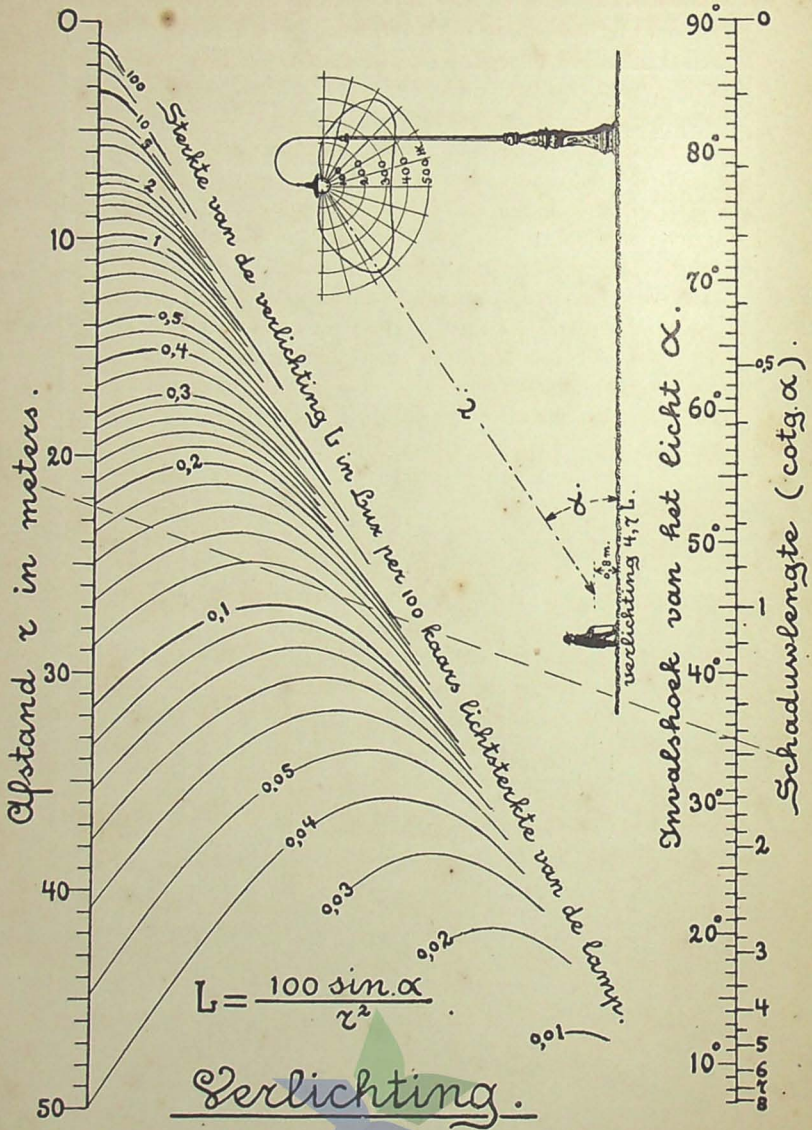


Fig. 7.

twee vrije kanten heeft, is gebruik gemaakt voor het vormen van een dubbelschaal voor de tweede betrekking, namelijk door tegenover α een functieschaal voor s te teekenen.

De veranderlijke L wordt op $[r, \alpha]$ voorgesteld door een bundel raakkrommen.

Toepassing van de grafiek:

Gevraagd wordt te bepalen, welke verlichting een straatlantaarn geeft, op een punt 0,8 m. boven een gedeelte van het straatoppervlak, dat op 22,4 m. van de lantaarn verwijderd is. De lichtsterkte van de lamp in die richting is 470 H.K. De invalshoek van het licht op het bedoelde punt is $34^{\circ}50'$, deze hoek kan bepaald worden door de lengte te meten van de schaduw van een stok, welke loodrecht op het straatoppervlak geplaatst wordt. De schaduw zal in het gegeven geval $1,44 \times$ de lengte van den stok zijn. Wij leggen nu door de twee schaalpunten $r = 22,4$ en $\alpha = 34^{\circ}50'$ (of $s = 1,44$) een rechte afleeslijn. Daartoe kunnen wij gebruik maken van een der kanten van een liniaal, een strakke draad, een scherp omgevouwen papier, of, wat het meest geschikt is, een op helder celluloid ingekraste rechte lijn.

Daar de afleeslijn in ons geval niet aan een der geteekende krommen raakt, moeten wij interpoleeren. Wij moeten ons dus de ligging indenken van een tot den bundel behorende lijn, welke aan de afleeslijn raakt. Dit is de lijn voor een waarde van ongeveer 0,114.

De sterkte van de verlichting is dus $4,7 \times 0,114 = 0,53$ Lux.

Wanneer het bedoelde punt midden tusschen twee van deze lantaarns ligt, is de totale verlichting ruim 1 Lux. Voor een matig drukke straat is dit voldoende.

§ 25. In figuur 8 vormen de regelmatige bundels (r) en (α) een regelmatig net (r, α), waarop L wordt voorgesteld door een bundel (snij-)krommen.

Aan de bovenzijde is een schaal geteekend voor s , welke schaal gebruikt kan worden in combinatie met den bundel (α).

Het zelfde waardenstel als zoeven, n.l.

$$r = 22,4$$

$$\alpha = 34^{\circ}50', \quad s = 1,44$$

$$L = 0,114,$$

is hier door het middelpunt van een klein cirkeltje aangeduid.

§ 26. In figuur 9 is de betrekking tusschen r, α en L afgebeeld op een functieschalenstel $[r, \alpha]$. $[r]$ is een z.g. *logarithmische*

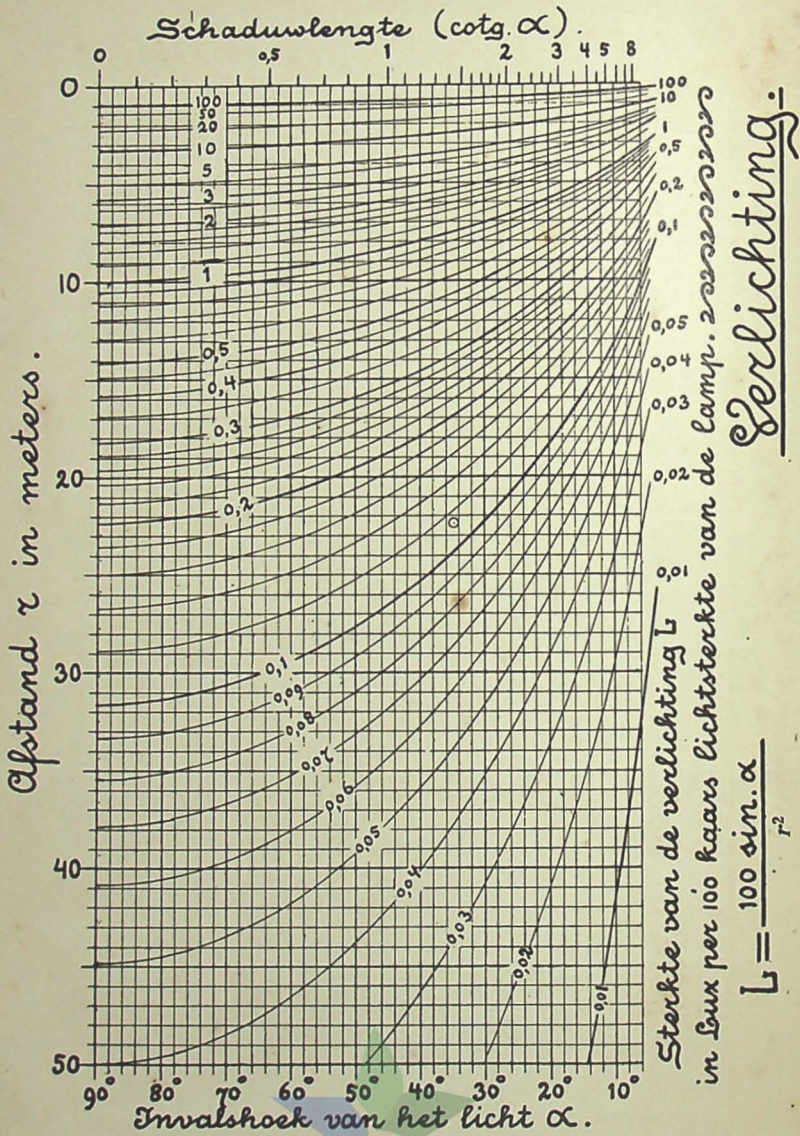


Fig. 8.

Verlichting.

$$L = \frac{100 \sin. \alpha}{r^2}$$

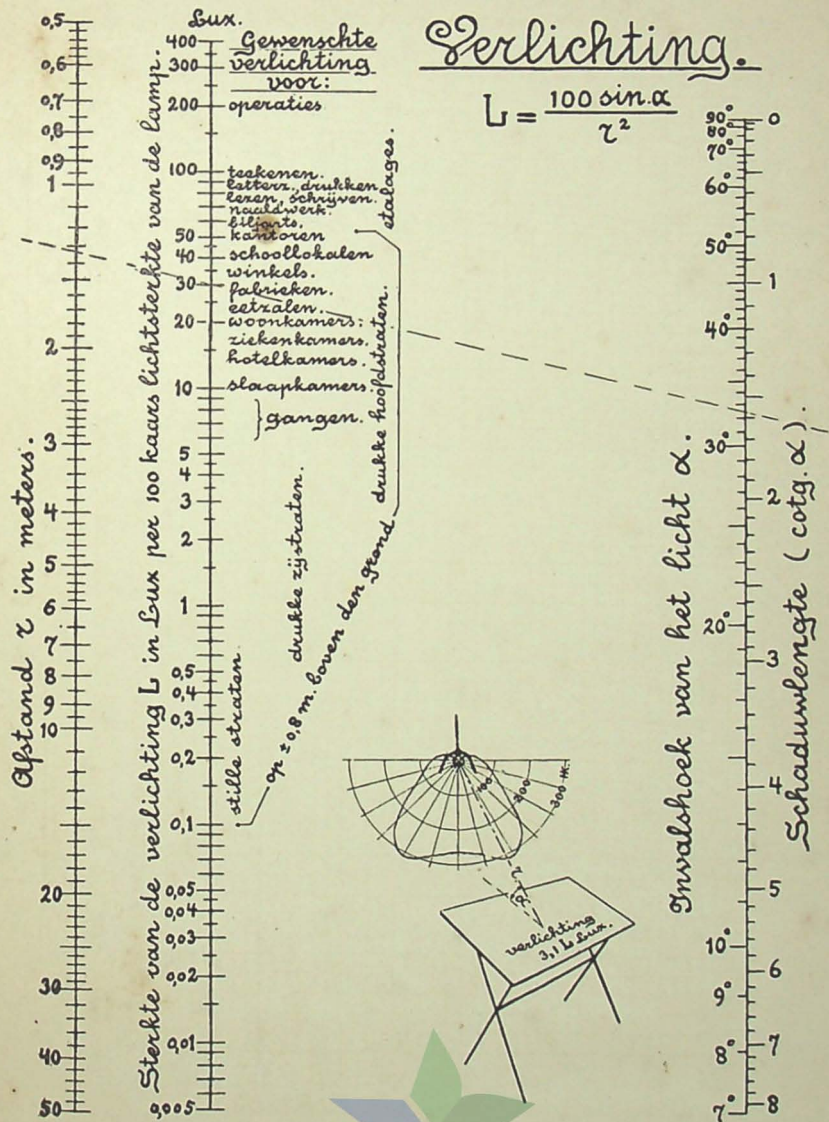
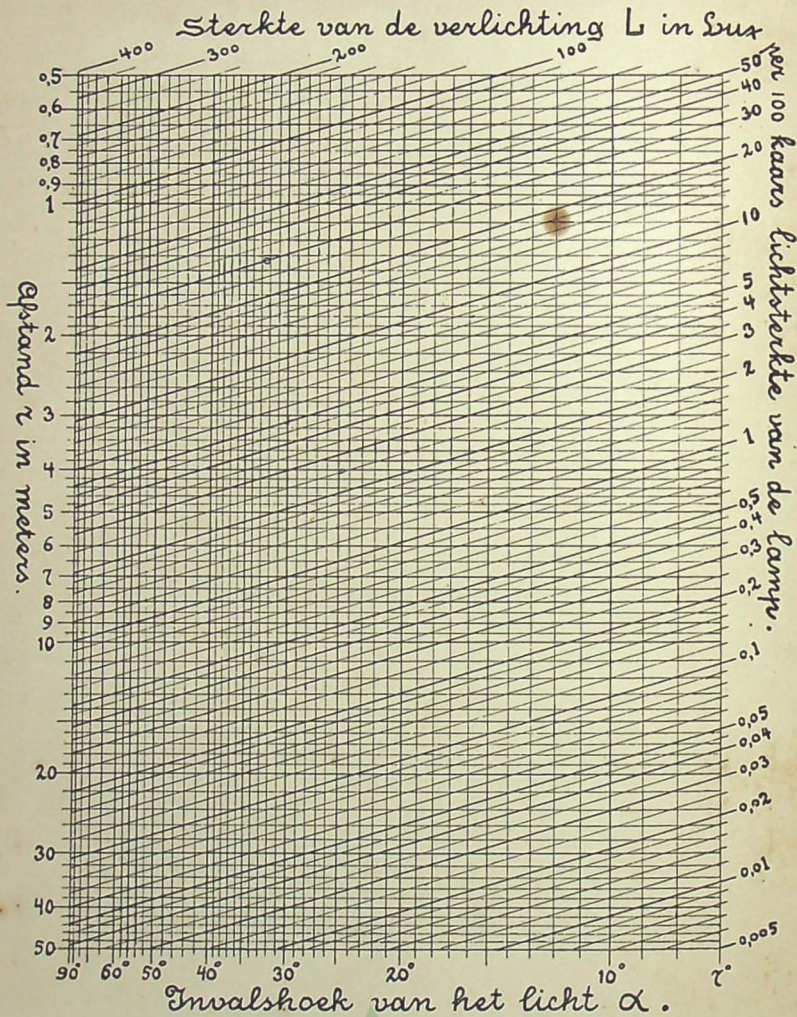


Fig. 9.



Verlichting.

$$L = \frac{100 \sin. \alpha}{r^2}$$

Fig. 10.

schaal, $[\alpha]$ een log.sinusschaal; op het door deze twee schalen gevormde schalenstel wordt L eveneens door een schaal voorgesteld, en wel, evenals r , door een logaritmische schaal.

Tegenover α is weer een functieschaal voor s geteekend, te zamen vormen deze schalen weer een dubbelschaal voor $s = \cotg. \alpha$.

Ook van $[L]$ is op deze wijze gebruik gemaakt. Aan de andere zijde der schaal zijn hier verschillende verlichtingsgevallen opgesomd (een *soort* veranderlijke). Deze dubbelschaal geeft dus het verband tusschen verschillende verlichtingsobjecten en de vereischte verlichting.

Toepassing van het nomogram:

Op een teekentafel valt het licht onder een hoek van $32^{\circ}25'$ (schaduwlgte 1,57). De afstand tot de lamp, welke in die richting een lichtsterkte heeft van 310 H.K., is 1,33 m. De afleeslijn door $r = 1,33$ en $\alpha = 32^{\circ}25'$ snijdt $[L]$ bij $L = \text{ruim } 30$.

De verlichting is dus ongeveer 94 Lux. Zooals de middelste dubbelschaal aangeeft, is dit voor een teekentafel voldoende.

§ 27. Ten slotte geeft figuur 10 de voorstelling door drie bundels rechten weer. Die voor r en L zijn weer logaritmisch, (α) is een log.sinusbundel. Er is hierbij geen plaats voor het opnemen van nevenbetrekkingen als tusschen invalshoek en schaduwlgte en tusschen verlichtingssterkte en verlichtingsobjecten. Hetzelfde waardenstel als in § 26, n.l.

$$r = 1,33$$

$$\alpha = 32^{\circ}25'$$

$$L = 30,$$

is hier door het middelpunt van een klein cirkeltje aangeduid.



HOOFDSTUK 6.

Het schaalnomogram tegenover de andere grafische voorstellingswijzen.

§ 28. Ter vergemakkelijking van het overzicht is in figuur 11 een grafiek geteekend voor de onderlinge vergelijking der vier grafische voorstellingswijzen ¹⁾. Hierbij is getracht een zoo objectief mogelijke waardeering te geven.

De vier voorstellingswijzen zullen wij verder aanduiden met de, — ook in de grafiek bijgeschreven-, nummers en afkorting: **1, 2, sch.** en **4.**

2 is tegenwoordig nog de bekendste en met **4** de gangbaarste voorstellingswijze. De laatste, tot voor kort weinig gebezigd, wordt, voornamelijk bij toepassing van logaritmische bundels, meer en meer gebruikt.

Voor het gebruiken van **1** is in het algemeen geen reden. Het **schaalnomogram** daarentegen verdient, zooals wij hierna zullen aantoonen, in velerlei opzicht de voorkeur boven de andere voorstellingswijzen.

§ 29. Het Formaat.

De onderlinge vergelijking voorgesteld in figuur 11, is gebaseerd op de veronderstelling, dat voor alle vier voorstellingswijzen het beschikbare tekenvak gelijk van vorm en grootte is.

Bij schaalnomogrammen kan, met het oog op de lengte van de afleeslijn, de schaalengte hoogstens een 30 cm. bedragen, terwijl de grootte van bundelnomogrammen slechts begrensd wordt door den eisch dat zij gemakkelijk hanteerbaar moeten zijn.

De constructie.

De constructie van het schaalnomogram eischt weinig reken- en tekenwerk, **4** vergt reeds meer berekening, terwijl bij **1** en **2** de

¹⁾ De in figuur 11 voorgestelde betrekking is een betrekking tusschen twee soortveranderlijken (grafieksoorten en punten van vergelijking) en een onvolledige getalveranderlijke. De laatste wordt voorgesteld door een „zwart-wit” schaal, waarbij geldt: „hoe witter, hoe gunstiger”.

Onderlinge vergelijking van de vier een-
-voudigste grafische voorstellingswijzen voor
een betrekking met drie veranderlijken.

Punten van vergelijking:	Grafische voorstellingswijzen:				
	1.	2.	sch.	4.	
Formaat	Gebondenheid bij de keuze van het formaat.				
Constructie	Beknoemd.				
	Teekenswerk.				
Afwerking	Gelegenheid tot het opnemen van nevenbetrekkingen.				
	Ruimte voor bijschriften, figuren, enz..				
Tijd	Benodigde tijd voor het maken van de grafiek.				
Overzicht	Verloop van de betrekking.				
	Scheiding van de veranderlijken.				
Aflering	Benodigde afleesmiddelen.				
	Nauwkeurigheid der aflering.				
	Geschiktheid voor ongeschoolden.				
Gebruik	In acht te nemen voorzorgen bij het gebruik.				
De in bovenstaande grafiek toegepaste „zwart-wit“ schaal is:					
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">0. </div> <div style="text-align: center;">2. </div> <div style="text-align: center;">4. </div> <div style="text-align: center;">6. </div> <div style="text-align: center;">8. </div> <div style="text-align: center;">10. </div> </div>					
<div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> ongunstig gunstig. </div>					

ligging van een groot aantal punten berekend moet worden en het teekenen van de krommen door deze punten lastig en tijdrovend is.

De afwerking.

Een groot voordeel van het schaalnomogram is de gelegenheid welke het biedt voor het opnemen van nevenbetrekkingen, hetzij door toepassing van dubbelschalen, hetzij door op hetzelfde schalenstel meerdere betrekkingen tusschen drie veranderlijken voor te stellen.

Bundelnomogrammen zijn daar minder geschikt voor.

Het schaalnomogram laat bovendien nog een overvloed van ruimte vrij voor het plaatsen van bijschriften, figuren, enz.

Tijd.

Uit ervaring is mij gebleken, dat *gemiddeld* voor het berekenen, teekenen en afwerken noodig is:

voor grafieken volgens	1	14 uur
” ” ”	2	12 ”
” ” ”	sch	4 ”
” ” ”	4	8 ”

Een schaalnomogram wordt dus ongeveer drie maal zoo vlug vervaardigd als een grafiek bestaande uit een bundel krommen op een regelmatig net.

Overzicht.

Het verloop van de betrekking is bij 2 nog het meest overzichtelijk, hoewel wij ons daar toch niet te veel van moeten voorstellen.

Ontegengesteld is dat verloop echter bij het gebruik van functieschalen en functiebundels, — ook wegens gebrek aan routine —, lastiger te overzien. Daarentegen is de scheiding der veranderlijken bij het schaalnomogram volmaakt, bij 1 goed, bij 4 en vooral bij 2 slecht te noemen.

De aflezing.

Tegenover 2 en 4 hebben het schaalnomogram en 1 het nadeel, dat het voor de aflezing noodig is een rechte lijn over de grafiek te leggen. In de meeste gevallen echter, is, zonder gebruikmaking van een aanwijzstift, de aflezing op 2 en 4 evenmin mogelijk.

Interpolatie en aflezing kunnen bij het schaalnomogram gemakkelijk en zeer nauwkeurig geschieden.

Doór de volmaakte scheiding der veranderlijken kan ieder niet wiskundig geschoold persoon, iedere arbeider, de schaalnomo-

grammen gebruiken. Met de andere soorten grafieken is dat, — de ervaring heeft dat geleerd —, niet mogelijk.

Het gebruik.

Er is ten slotte tegen het schaalnomogram nog één bezwaar. Het is namelijk niet geoorloofd de schaalnomogrammen te vouwen of te kreuken, daar dit een onnauwkeurige aflezing zou veroorzaken. Ze zijn dus in het bijzonder in boeken op hun plaats, terwijl losse schaalnomogrammen op niet te dun papier moeten worden geteekend of gereproduceerd.

Soms wordt tegen het schaalnomogram aangevoerd, dat ook krimpen van het papier een ontoelaatbare vervorming kan geven. Wanneer het papier bij het krimpen vlak blijft, behoeft daarvoor geen vrees te bestaan, daar een schaalnomogram elke vervorming waarbij rechte lijnen recht blijven, mag ondergaan.

Trouwens, ook bij 4 zou dat bezwaar gelden, daar hierbij voor het teekenen meestal gebruik wordt gemaakt van z.g. **coördinatenpapier**, dat is papier waarop een of ander functienet is gedrukt. Wanneer dat net door krimpen ongelijkmatig zou vervormen, zou de 3e bundel niet uit rechten, maar uit krommen moeten bestaan.

§ 30. **Conclusie.** Bij een beschouwing van figuur 11 blijkt, dat het schaalnomogram, bij de onderlinge vergelijking der voorstellingswijzen, op acht van de twaalf punten van vergelijking het gunstigst naar voren treedt.

Opgeteld verhoudt zich de waardeering in de vier kolommen als 40 : 48 : 80 : 60.

Daar de punten van vergelijking geen gelijke mate van belangrijkheid bezitten en de waardeering slechts globaal kon zijn, heeft de genoemde verhouding niet anders dan betrekkelijke waarde.

Uit de voorafgaande beschouwingen is echter duidelijk gebleken dat het schaalnomogram in vele opzichten boven de andere voorstellingswijzen te verkiezen is.

Wegens de beperking die ik mij heb opgelegd, zal daarom alleen de constructie van die voorstellingswijze hier behandeld worden. In de volgende hoofdstukken zal dus een volledige uiteenzetting worden gegeven van de wijze, waarop schaalnomogrammen voor betrekkingen tusschen drie veranderlijken moeten worden berekend en geconstrueerd.

DEEL II.

FUNCTIESCHALEN EN FUNCTIEVERGELIJKINGEN.

HOOFDSTUK 7.

Veranderlijken, functies en functievergelijkingen.

§ 31. De reeks waarden, welke een veranderlijke kan aannemen, noemen wij het *bereik* van die veranderlijke.

Onder het *absolute bereik* verstaan wij dan het *verschil* tusschen de grootste en kleinste waarde van de veranderlijke, onder het *relatieve bereik* het *quotient* van die grenswaarden.

Bestaat er tusschen twee of meer veranderlijken een betrekking, zoodanig, dat uit de gegeven waarden van op één na alle veranderlijken, de waarde van de overblijvende veranderlijke kan worden bepaald, dan noemt men deze laatste een **functie** van de overige veranderlijken.

Een functie van z wordt voorgesteld door $f(z)$, in de Nomenclografie korter door een enkele letter, bij voorkeur door f , g , F of G ; ook worden de letters, E , H , K , φ , ψ , ξ , ζ , Φ en Ψ gebezigd.

Functies van z_1 , z_2 , enz. worden voorgesteld door f_1 , f_2 , enz. of door g_1 , g_2 , enz. enz. Een functie van z_1 én z_2 wordt aangeduid door f_{12} , g_{12} , enz.

§ 32. Wordt een functie of veranderlijke gelijkgesteld aan een andere functie of veranderlijke, of aan een bepaalde waarde, dan ontstaat een **vergelijking** of **formule**. Staat eenerzijds van het gelijkteken een der veranderlijken, anderzijds een functie van de overige veranderlijke(n), dan zeggen wij dat die vergelijking de eerstgenoemde veranderlijke **explicite** als functie van de overige voorstelt.

Zijn twee functies aan elkaar gelijk gesteld, of komen aan één kant van het gelijkteken eenige veranderlijken te zamen in een functie voor, dan zegt men dat de vergelijking die veranderlijken **implicite** als functies van elkander voorstelt.

Wanneer in een vergelijking, welke een betrekking tusschen *twee* veranderlijken voorstelt, aan beide zijden van het gelijkteken slechts een der veranderlijken of een functie daarvan voorkomt, dan noemen wij dat een **vergelijking met gescheiden veranderlijken**. Voor een betrekking met twee veranderlijken is dus de explicite wijze van voorstelling hiervan een bijzonder geval.

§ 33. Een betrekking tusschen twee veranderlijken kan dus als vergelijking worden aangeduid:

explicite ten opzichte van z_2 , door $z_2 = f_1$,

implicite, door $F_{12} = 0$,

met gescheiden veranderlijken, door $f_1 = f_2$.

De letters F , G , φ en ψ worden bij voorkeur dán gebezigd, wanneer de functie op een of andere wijze gebonden is aan bepaalde waarden of aan bepaalde andere functies. Twee functies van geheel denzelfden vorm, doch alleen verschillend in de veranderlijken, welke onderscheidenlijk z_1 en z_2 zijn, worden b.v. aangeduid met F_1 en F_2 .

Kan uit een vergelijking

$$z_1 = F_2$$

worden afgeleid

$$z_2 = F_1$$

, dan noemen wij die betrekking **symmetrisch** ten opzichte van de beide veranderlijken.

Zoo is b.v. de betrekking tusschen sinus en cosinus van eenzelfde hoek symmetrisch, want als

$$\sin \varphi = z_1$$

$$\cos \varphi = z_2$$

is

$$z_1 = \sqrt{1 - z_2^2} \quad \text{en} \quad z_2 = \sqrt{1 - z_1^2}.$$

§ 34. Bij de constructie van schaalnomogrammen is het noodig de gegeven vergelijking zoodanig te herleiden, dat de veranderlijken in den nieuwen vorm op een bepaalde wijze verbonden, of beter gezegd, gescheiden zijn. Hoe dat verband moet wezen wordt aangegeven door een zogenaamde **functievergelijking**.

Zulk een functievergelijking is bijvoorbeeld

$$f_1 g_3 + f_2 = f_3$$

, aangevende, dat de eerste term moet bestaan uit het product van een functie van de eerste en een functie van de derde veranderlijke; de tweede term een functie moet zijn van de tweede veranderlijke en het tweede lid weer een functie moet zijn van de derde verander-

lijke. De twee functies van de derde veranderlijke, g_3 en f_3 , mogen in 't algemeen niet lineair verwant zijn. Welke veranderlijke in de voor te stellen betrekking aangeduid wordt als 1e veranderlijke, enz., is veelal onverschillig.

Een vergelijking, welke op die wijze in den vorm van een of andere functievergelijking geschreven is, noemen wij weer een **vergelijking met gescheiden veranderlijken**.



HOOFDSTUK 8.

Functieschalen.

§ 35. Een functieschaal kan beschouwd worden als een dubbelschaal, waarvan een der schalen is weggelaten. Die weggelaten schaal is de metrische schaal, welke, in den vorm van een maatlatje, bij de constructie werd gebezigd.

De veranderlijke, welke door de metrische schaal wordt voorgesteld, duiden wij aan door x of y , zoo noodig ook wel door p , q , r , u of v .

Deze letters duiden bijgevolg ook de afstand in centimeters aan, gemeten van den oorsprong tot het betreffende schaalpunt.

Een functieschaal stelt dus een betrekking voor, als bij voorbeeld

$$f = 4z^2 + 7$$

Over 't algemeen wordt alleen het laatste lid genoemd; wij spreken dus van een functieschaal (voor) $4z^2 + 7$.

Behalve $[z]$ wordt ook de notatie $[f]$ voor zulk een schaal gebezigd.

De **oorsprong** van een functieschaal is het schaalpunt waarvoor $f = 0$; het **nulpunt** is het schaalpunt waarvoor $z = 0$.

De waarde van z , waarvoor f minimum is, wordt aangeduid door de grieksche letter α , die, waarvoor f maximum is, door de grieksche letter ω . De waarden $f(\alpha)$ en $f(\omega)$ worden **kleinste en grootste functiewaarde genoemd**. Het is natuurlijk de bedoeling dat α en ω binnen het bereik van z liggen, gewoonlijk zijn het de grenswaarden van dat bereik.

Het verschil van de grootste en kleinste functiewaarde heet **functielengte** of **functiebereik** en wordt aangeduid door de letter k . Dus:

$$f(\omega) - f(\alpha) = k \quad (1)$$

De functielengte is steeds positief.

§ 36. Wanneer voor een bepaalde functie een schaal moet worden geconstrueerd, dan mogen wij, binnen zekere grenzen, meestal zelf de lengte van de schaal kiezen.

Om de gewenschte lengte te verkrijgen, voeren wij een z.g.

modulus in. Deze is een lengte, in c.m. gemeten, en wordt aangeduid door de grieksche letter μ .

Voor het construeeren van de functieschaal wordt dan de formule

$$x = \mu f \quad (2)$$

gebruikt.

De grootte van μ wordt als volgt bepaald. Noemen wij de schaalengte, — in c.m. gemeten —, welke, in verband met het beschikbare papier-oppervlak of met de verlangde nauwkeurigheid, ongeveer gewenscht is, L , dan berekenen wij den modulus uit

$$\mu \approx \frac{L^1}{k} \quad (3)$$

Voor μ nemen wij dan de naastbijgelegen ronde waarde.

§ 37. **Voorbeeld.** Een schaal te construeeren, lang ongeveer 12 cm., voor $\sqrt{z^3}$ tusschen $z = 2$ en $z = 9$. (zie figuur 12).

Constructie: Dus is hier $\alpha = 2$, $\omega = 9$ en $L = 12$.

Bijgevolg:

$$k = 9^{3/2} - 2^{3/2} \approx 24,2$$

en dus

$$\mu \approx \frac{12}{24,2}, \text{ stel } = 0,5.$$

De ligging der schaalpunten wordt dus berekend uit

$$x = 0,5 \cdot \sqrt{z^3}.$$

Wij voeren de berekening eerst uit voor de geheele waarden van z . Wanneer deze hoofddeelpunten geteekend zijn, hebben wij een overzicht van de schaal en kunnen uitmaken hoeveel tusschendeelpunten gewenscht zijn. Dat aantal zal tusschen elke twee hoofddeelpunten bij voorkeur 2, 5 10 of 20 moeten bedragen.

In ons geval nemen wij er 10.

Wij berekenen en teekenen dan eerst nog de deelpunten voor de waarden 2,5; 3,5; 4,5; enz.

Wanneer de opvolgende schaaldeelen nu niet te veel in lengte verschillen, dan behoeven de verdere deelpunten niet meer te worden berekend, maar kunnen deze ook grafisch worden bepaald.

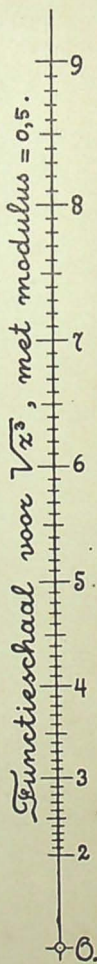


Fig. 12.

1) Voor „(is) ongeveer gelijk aan” zullen wij het teeken \approx gebruiken.

Daartoe wordt op zeer doorschijnend papier een waaier geteekend in den vorm van figuur 13. Daarvoor worden op een rechte hulplijn drie gelijke stukken uitgezet, waarvan het middelste weer in een aantal gelijke deelen (in ons geval 5) wordt verdeeld. Uit een punt P, ongeveer tegenover het midden gelegen, worden stralen getrokken naar de deelpunten.

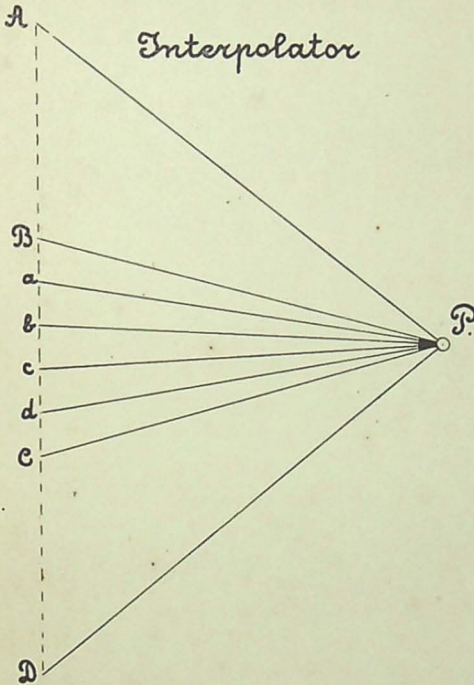


Fig. 13.

Door nu de snijpunten met de andere stralen door te prikken, verkrijgen wij op het middelste schaaldeel een onderverdeling in 5 deelen.

De aldus gemaakte schaalverdeling verschilt praktisch niet van een geheel door berekening verkregen verdeling.

Om ook de uiterste deelen van de schaal op deze wijze van de onderverdeling te kunnen voorzien, is het noodig, hetzij om de juist buiten de grenzen gelegen hoofddeelpunten te bepalen, hetzij om de ligging van enkele der gezochte onderverdelingen te berekenen, waarna de overige weer met behulp van den interpolator kunnen worden bepaald.

Wanneer de oorsprong buiten het teekpapier valt, moeten, in

Deze **interpolator** wordt zoodanig op de schaal gelegd dat de hoofdstralen PA, PB, PC en PD door vier opeenvolgende deelpunten gaan (figuur 14). Geheel nauwkeurig zal dat over 't algemeen niet kunnen plaats hebben, alsdan moet er voor gezorgd worden, dat de beide binnenste hoofdstralen zuiver op de deelpunten vallen en de afwijking van de twee buitenste stralen tegengesteld, en, wat de grootte betreft, zoo veel mogelijk in verhouding tot de lengte van de schaaldeelen is.

plaats van de afstanden tot dien oorsprong, de afstanden tot een ander punt van de schaal berekend worden en deze van dat punt af worden uitgezet.

Wordt voor dat punt het schaalpunt a gekozen en stellen wij een

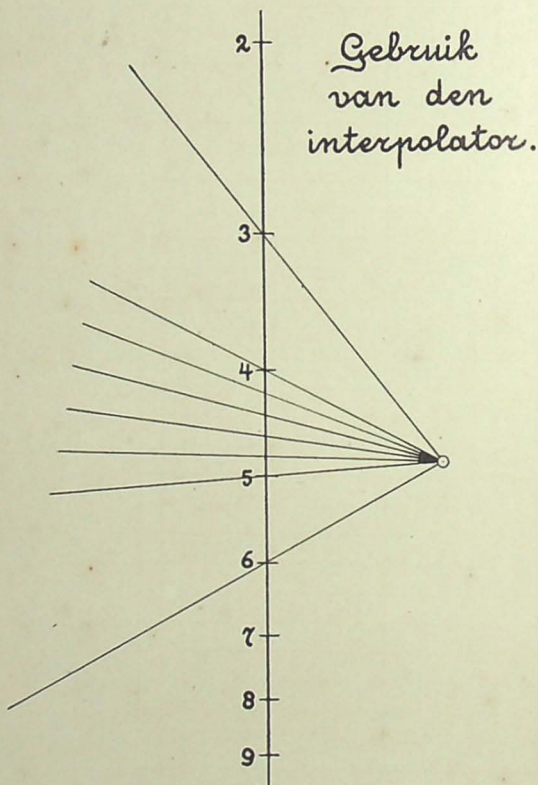


Fig. 14.

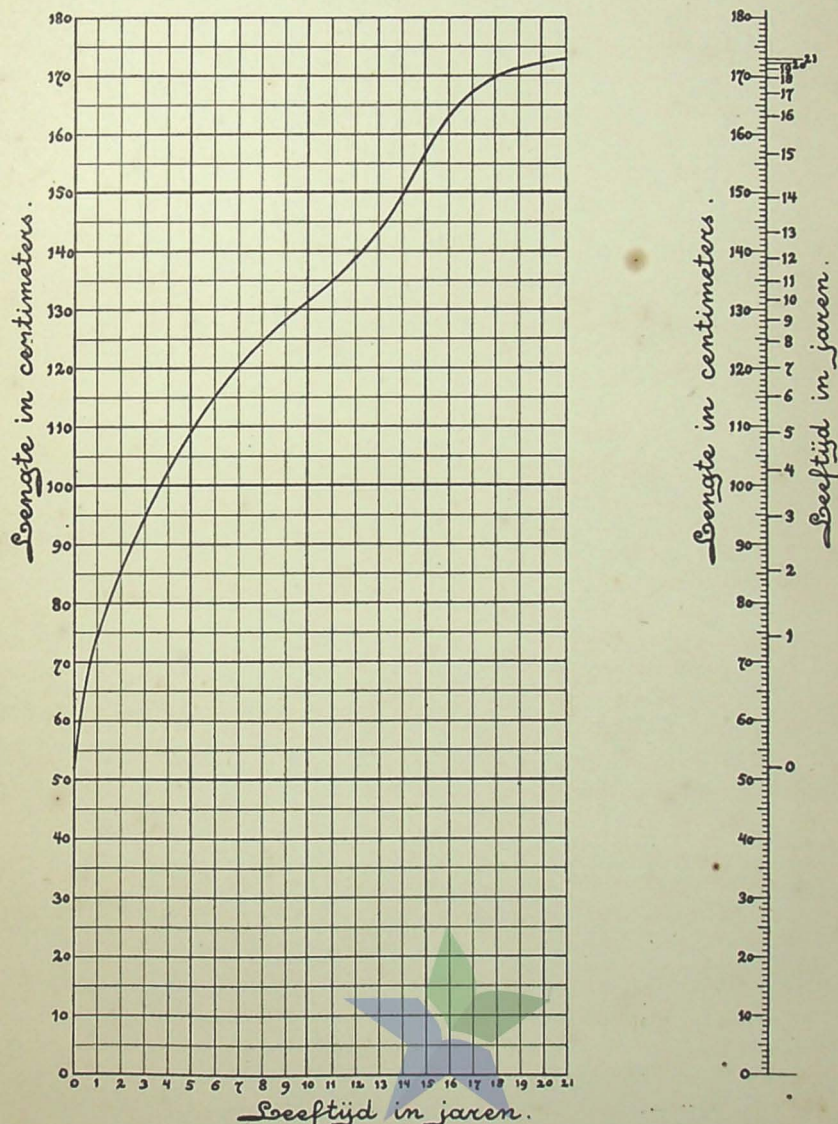
willekeurige waarde van z , binnen het bereik, voor door de griek-
sche letter η , dan worden de uit te zetten afstanden berekend uit

$$x = \mu \{f(\eta) - f(a)\} \quad (4)$$

§ 38. Vergelijkende beschouwing van snijkromme en functie- schaal.

In figuur 15 is, zoowel door een snijkromme op een regelmatig
net, als door een dubbelschaal, de betrekking voorgesteld, welke

Gemiddelde groei van jongens
voorgesteld door een snijkromme en een functieschaal.



PERPUSTAKAAN NASIONAL

Fig. 15.
REPUBLIC OF INDONESIA

bestaat tusschen den leeftijd en de gemiddelde lengte van den mannelijken mensch. ¹⁾

Nemen wij aan, dat wij deze betrekking rechtstreeks konden nagaan uit den groei van een „model“-mensch, en wel, door van de geboorte tot den volwassen leeftijd, elk jaar (en c. q. elke maand) diens lengte door een streep op een muur aan te duiden, dan zouden wij op die wijze een *functieschaal* verkregen hebben, welke de *primaire voorstelling* van de betrekking zou zijn.

Plaatst men naast die streepjes een meetlat, dan ontstaat een dubbelschaal, waarvan wij een afbeelding zien in figuur 15 rechts.

De voorstelling door een functieschaal is in dit geval dus de meest voor de hand liggende. Het verloop van de betrekking wordt door haar minstens even duidelijk weergegeven als door de snijkromme, waarmede wij echter door menigvuldiger toepassing meer vertrouwd zijn geraakt.

Uit de functieschaal is met één oogopslag te zien, hoe de groei van de geboorte tot 8 à 9 jarigen leeftijd afneemt, daarna weer toeneemt tot het 14e à 15e levensjaar en ten slotte weer geringer wordt, tot, op ongeveer 21-jarigen leeftijd, de volwassen lengte wordt bereikt.

Snellere groei wordt bij de functieschaal door grootere schaal-deelen, bij de snijkromme door stijlere helling weergegeven.

Wat de aflezing betreft, raad ik aan met beide voorstellingswijzen eenige waardenstellen te bepalen.

Dan zal men bemerken hoe omslachtig die aflezing bij de snijkromme toch eigenlijk is. Laten wij bv. zoeken, welke lengte normaal is voor een leeftijd van 8 jaar en 4 maanden. Wij bewandelen dan met onzen blik den volgende weg:

Zoek onderaan de getallen 8 en 9, volg de strook daartusschen naar boven, interpoleer op $\frac{1}{3}$ (4 maanden) van de strookbreedte, bepaal het snijpunt van die denkbeeldige lijn met de kromme, bepaal de ligging van dat punt in de horizontale strook, volg deze strook naar links, zie hoe de ligging is van deze strook ten opzichte van de getallen 120 en 130, bedenk dan weer welke ligging het snijpunt had in de horizontale strook en interpoleer om de gezochte waarde, ongeveer 126, te verkrijgen.

¹⁾ Hierbij is het gemiddelde genomen van onderzoekingen in verschillende Noord-Europeesche landen. O.a. is gebruik gemaakt van de gegevens in de studie van *Georg Krogh-Jansen*. „Der Unterschied im männlichen und weiblichen Entwicklungstempo und seine Bedeutung für die moderne Koëdukatonsfrage“. Archiv für die Gesamte Psychologie XLV. Band.

§ 39. Projectief verwante functieschalen.

Zij in figuur 16 OA een functieschaal voor de functie f , met modulus μ . O is de oorsprong.

Wij projecteeren deze schaal uit P op een willekeurig gelegen drager O'A' en trekken de hulplijnen PV en PV' evenwijdig aan de twee dragers.

Nu is voor elk willekeurig schaalpunt X:

$$\triangle PVX \sim \triangle X'V'P$$

en dus is

$$VX \cdot V'X' = PV \cdot PV' = \text{constant.}$$

Stel dit constante product = c en de afstanden $OV = a$ en $O'V' = b$.

O' is den willekeurig aangenomen oorsprong van de schaal O'A'.

OX is gelijk aan μf .

Stel O'X' gelijk aan de functie F .

Dan is dus

$$(\mu f - a)(F - b) = c$$

of

$$\mu f F - \mu b f - a F + (ab - c) = 0.$$

Met invoering van nieuwe coëfficiënten is dus in 't algemeen:

$$\alpha f F + \beta f + \gamma F + \delta = 0 \quad (5)$$

; hetgeen een z.g. **bilineaire betrekking** tusschen de functies f en F is.

De schalen $[f]$ en $[F]$ worden ten opzichte van elkaar **projectief** genoemd. Deze verwantschap wordt aangeduid met het teeken $\overline{\wedge}$.

De ligging van de twee schalen als in figuur 16, dus zoo, dat alle verbindingslijnen van gelijkgenummerde schaalpunten *concurrent* zijn, d.w.z. allen door één gemeenschappelijk punt, — de pool of het toppunt —, gaan, heet **perspectief**.

Deze ligging wordt steeds verkregen, wanneer wij twee gelijkgenummerde schaalpunten van de onderling projectieve schalen tot samenvalling brengen.

De perspectieve ligging van twee of meer onderling projectieve schalen wordt aangeduid door het teeken \wedge .

Bij het ontwerpen van schaalnomogrammen wordt van de beschreven projectieve wijze van constructie van schalen menigmaal gebruik gemaakt.

§ 40. Projectieve schaal.

Is f een lineaire functie en dus $[f]$ regelmatig, dan wordt de daaruit door projectie verkregen schaal (waarbij natuurlijk de twee

deelt, is de veranderlijke. Met den oorsprong aan een der draad-einden is dus de functie van de schaal:

$$F = \frac{Az}{z+1} \quad (7)$$

, waarin A de geheele lengte van den draad is. Deze schaal heet **segmentaire schaal** (figuur 17).

Projectief is eveneens de **reciproke schaal** (figuur 17). Deze stelt een functie voor

$$F = \frac{1}{z} \quad (8)$$

Bij een reciproke schaal ligt het nulpunt ($z = 0$) in het oneindige.

Wanneer een verdeling ten opzichte van den oorsprong verschoven, of in haar geheel vergroot of verkleind wordt, blijft toch haar karakter ongewijzigd. In den vervolge zal steeds de eenvoudigste formule worden gegeven, het is echter geoorloofd deze lineair te veranderen, b.v. de formule (8) tot $F = \frac{a}{z} + b$.

§ 41. Macht-schalen.

Onder macht-schalen verstaan wij de schalen voor functies

$$F = z^n \quad (9)$$

waarin n elke reële waarde mag hebben.

Voor $n = 1$ wordt de schaal *regelmatig*, voor $n = -1$ *reciproke* (figuur 17).

Andere veel toegepaste machtschalen zijn de **kwadratische schaal**, als $n = 2$ en de **omgekeerd-kwadratische schaal** als $n = -2$, verder de schalen voor \sqrt{z} en $\frac{1}{\sqrt{z}}$, dus voor $n = \frac{1}{2}$ en $n = -\frac{1}{2}$.

Van de laatstgenoemde vier schalen geeft figuur 17 eveneens voorbeelden.

§ 42. Logarithmische schaal.

Volgens den grondslag van het Neperiaansche logaritmenstelsel is voor limiet $n = 0$.

$$\ln z = \frac{z^n - 1}{n} \quad (10)$$

De **logarithmische schaal** voor de functie

$$F = \log z \quad (11)$$

, kan dus als een macht-schaal beschouwd worden, waarbij de

machtsfunctie symbolisch kan worden voorgesteld door z^0 (figuur 17).

Deze schaal neemt in de Nomografie een zeer bevoorrechte plaats in, hetgeen zij te danken heeft aan de volgende bijzondere eigenschappen:

10. *Gelijke verhoudingen worden door gelijke schaalengten weergegeven.*

$$\text{voor } z = k\eta \text{ is } F = \log \eta + \log k$$

$$\text{„ } z = \eta \text{ is } F = \log \eta$$

$$\text{Dus is: } F(k\eta) - F(\eta) = \log k$$

Is k constant, dan is dus ook de schaalengte tusschen de schaalpunten $z = \eta$ en $z = k\eta$ constant.

Deze eigenschap maakt dat een logarithmische schaal altijd dadelijk te herkennen is. Zoo is er bv. een gelijken afstand tusschen de schaalpunten voor 2 en 3, 4 en 6, 10 en 15, of 5 en 7,5; omdat

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{15}{10} = \frac{7,5}{5}.$$

Op verschillende deelen van de schaal geeft deze eigenschap aanleiding tot een, — afgezien van de nummering —, geheel gelijke verdeling.

Zeer opvallend is dat voor de gedeelten, waarvoor de verhouding k gelijk is aan 10. (zie figuur 17).

20. *De relatieve nauwkeurigheid van aflezing is over de geheele lengte van de logarithmische schaal constant.*

Dit is een gevolg van de onder 1^o genoemde eigenschap. Wordt b.v. een ter hoogte van $z = 1000$ gelegen waarde afgelezen tot in eenheden nauwkeurig, dan zal een waarde in de nabijheid van $z = 10$ tot op $\frac{1}{100}$ eenheid kunnen worden afgelezen.

Dus voor beide aflezingen is er dan een relatieve nauwkeurigheid van 1 $\%$.

De gewone *regelmatige schaal* heeft over haar geheele lengte een *constante absolute afleesnauwkeurigheid*. D.w.z. dat men b.v. bij 1000 en bij 10 beiden tot op $\frac{1}{10}$ eenheid nauwkeurig kan aflezen.

De regelmatige schaal heeft daarom het bezwaar, dat voor de kleinere waarden de aflezing dikwijls niet met voldoende nauwkeurigheid kan plaats hebben.

Wanneer een *groot relatief bereik* moet worden voorgesteld, *verdiend dus de logarithmische schaal de voorkeur* boven de regelmatige.

Enkele Functieschalen. ∞ ∞ ∞ ∞

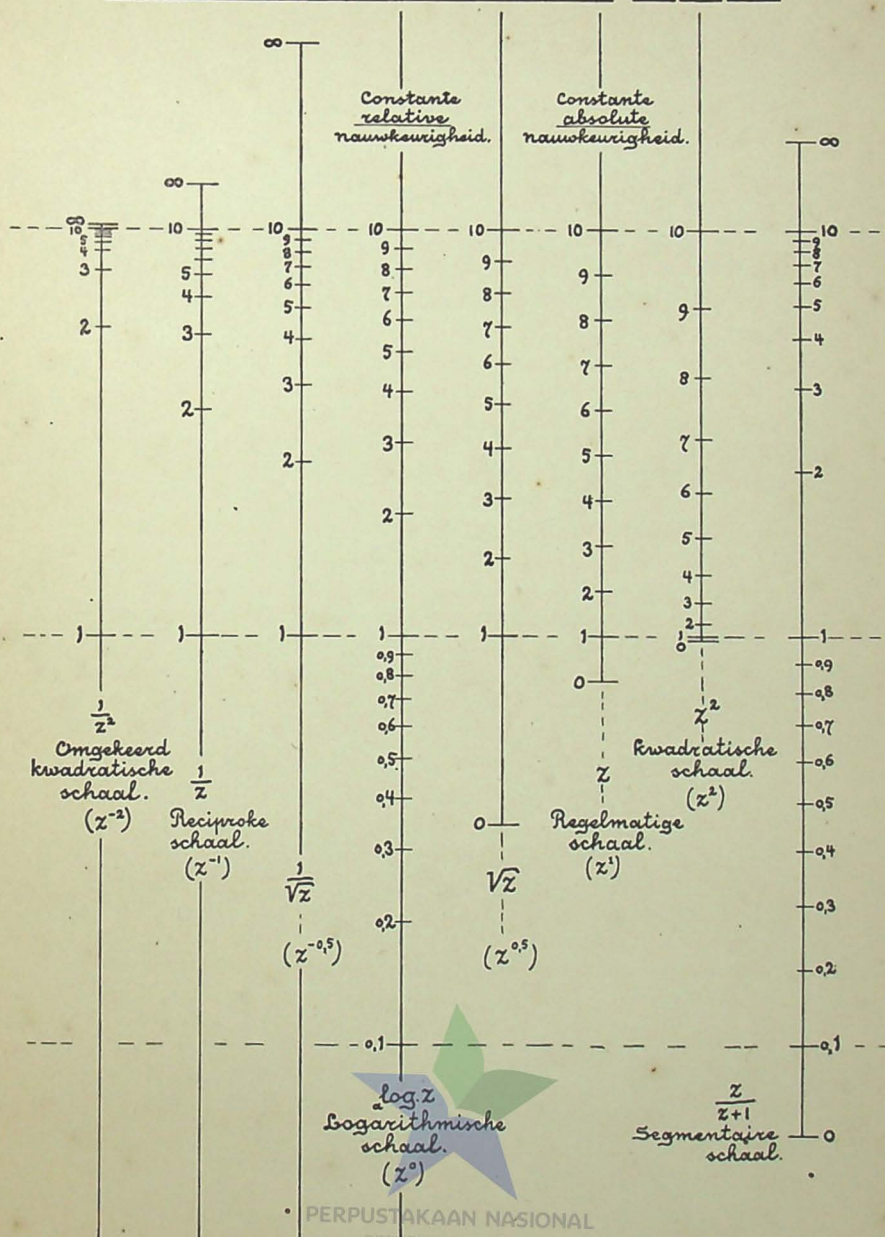


Fig. 17.

30. In de techniek worden zeer veel formules gebruikt, waarin het eerste lid het gedurig product is van machten der veranderlijken. B.v.

$$az_1^m z_2^n = z_3$$

Nemen wij de logarithmen, dan is

$$(m \log z_1 + \log a) + n \log z_2 = \log z_3$$

en wij verkrijgen dus een functievergelijking van het type

$$f_1 + f_2 = f_3$$

, welke door een eenvoudig nomogram, bestaande uit drie evenwijdige logarithmische schalen, is voor te stellen.

§ 43. Constructie van logarithmische schalen.

Hebben wij van een logarithmische schaal eenmaal een gedeelte voor een verhouding 10 geteekend, dan behoeven wij dit stuk slechts een of meermalen, geheel of gedeeltelijk, te herhalen, om de schaal voor het geheele bereik van z te verkrijgen.

Een logarithmische schaal van 1—10, 10—100, enz. noemen wij daarom een **logarithmische schaaleenheid**. Een andere naam daarvoor is **Manteb**, door Dr. P. SCHREIBER afgeleid van „Mantisse-bereich”. Als verkorte aanduiding daarvan zullen wij de hoofdletter **M** bezigen, zoo noodig voorzien van de indices der veranderlijken.

Op rekenlinialen komen logarithmische schaaleenheden voor van 7.5; 10; 12.5; 15; 20 en 25 cm. Ook zijn er driekantige schaalstokken met verschillende logarithmische schaaleenheden. Deze worden o.a. vervaardigd door A. W. FABER te *Stein* bij *Neurenberg*, DENNERT en PAPE te *Altona* en door TAVERNIER-GRAVET te *Parijs*.

Wanneer μ tusschen zekere grenzen naar verkiezing kan worden aangenomen, verdient het zeker de voorkeur, een dezer waarden van rekenliniaal of schaalstok voor de schaaleenheid te bezigen.

Bij het vervaardigen van nomogrammen zal het echter dikwijls voorkomen, dat een logarithmische verdeling met een andere, willekeurige, schaaleenheid moet worden geteekend.

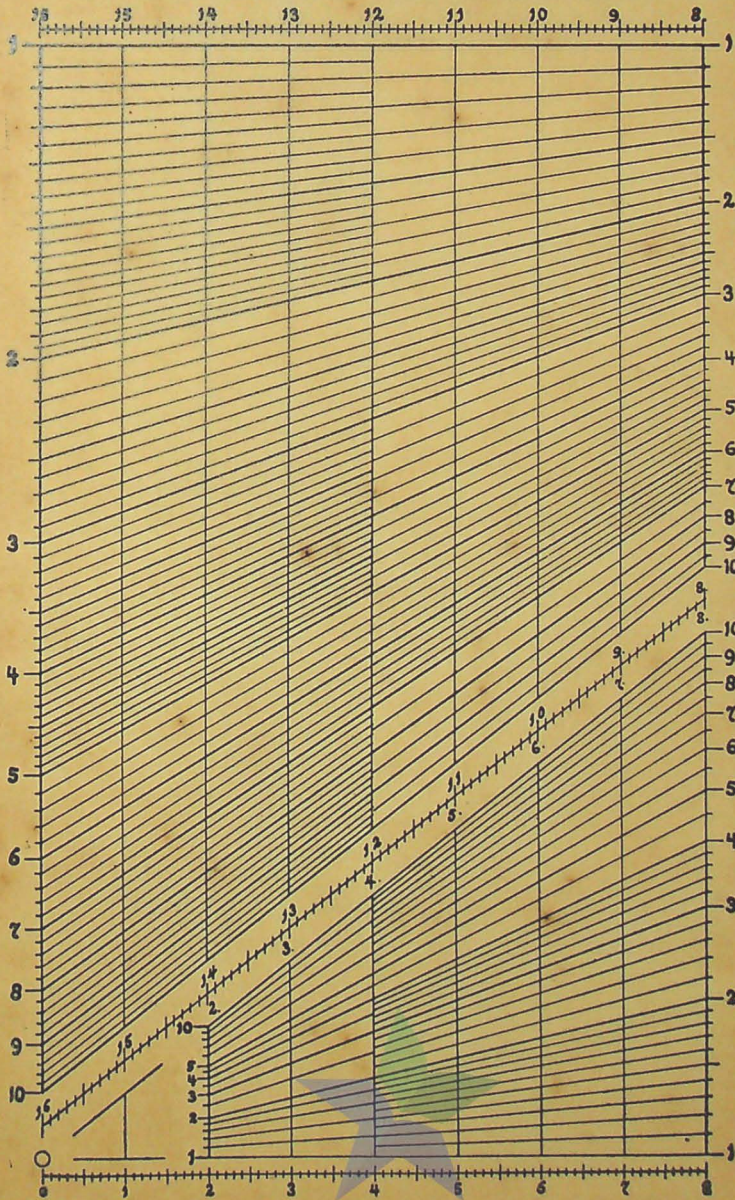
Soms is het dan mogelijk een dergelijke schaal, met behulp van projectie, uit een reeds op het teekenvel aanwezige logarithmische schaal te verkrijgen.

Zoo niet, dan maken wij gebruik van een **logarithmische harp**. In figuur 18 is, op doorschijnend papier, zulk een harp (of waaier) gedrukt voor schaaleenheden van 2 tot 16 cm., in figuur 19 een **verkorte logarithmische harp** voor schaaleenheden van 16 tot 40 cm. ¹⁾

De vereischte schaal kan daarmede geteekend worden:

¹⁾ Van beide harpen bevindt zich een tweede exemplaar achterin het boek.

Logarithmische harp, ~~voor~~
 voor schaalstukken van 2 tot 16 centimeter.



Spoorafwijking: Rekening houden met mogelijk gekrompen zijn van dit papier !!

PERPUSTAKA NASIONAL Fig. 18

10. door de harp ter juister plaatse op de teekening te leggen en de schaal door te prikken.
20. door de harp, op de plaats van de over te nemen schaaleenheid, scherp om te vouwen en de verdeeling langs de vouw op de teekening over te nemen.

Het spreekt van zelf, dat de over te nemen schaaleenheid evenwijdig moet zijn aan de basis van de harp.

Voor het teekenen van de grootere schaaleenheden, n.l. die van 16 tot 40 c.m., wordt de verkorte logaritmische harp van figuur 19 gebezigd. Deze heeft slechts een schaalengte van 20 tot 50, dus voor een verhouding $2^{1/2}$. De overige schaalstukken, n.l. die van 10 tot 20 en van 50 tot 100, zijn daarmede echter eveneens te verkrijgen.

§ 44. Onderlinge vergelijking van enkele functieschalen.

In figuur 17 zien wij enkele voorbeelden van de besproken functieschalen bijeen. Om deze te kunnen vergelijken zijn de moduli zoo gekozen, dat bij allen het bereik van 1 tot 10 op dezelfde schaalengte wordt voorgesteld. ¹⁾

Verder is van links naar rechts de exponent opklimmend, links van de logaritmische schaal is hij negatief, rechts daarvan positief. Geheel rechts is een *segmentaire schaal* afgebeeld.

Naar de logaritmische schaal toe, zien wij, links het oneindige genummerde schaalpunt, rechts het nulpunt, steeds verder af liggen.

Op de logaritmische schaal en links daarvan, ligt het nulpunt in het oneindige; op de logaritmische schaal en rechts daarvan, ligt het oneindig genummerde punt in het oneindige.

Om te kunnen nagaan of een functieschaal geschikt is voor de voorstelling van een bepaalde veranderlijke, moeten wij weten welke waarde daarvan, naar schatting het meest wordt gebezigd. Wij

¹⁾ Hiertoe werd gebruikt de constructieformule

$$x = \frac{z^n - 1}{10^n - 1} \quad (12)$$

Deze is lineair verwant met (9).

Voor z^n kan bij ontwikkeling in een reeks geschreven worden:

$$z^n = 1 + n \ln z + \frac{n^2}{2!} \ln^2 z + \dots$$

Voor limiet $n = 0$ kunnen wij volstaan met de eerste twee termen van de reeks, formule (12) gaat dan over in

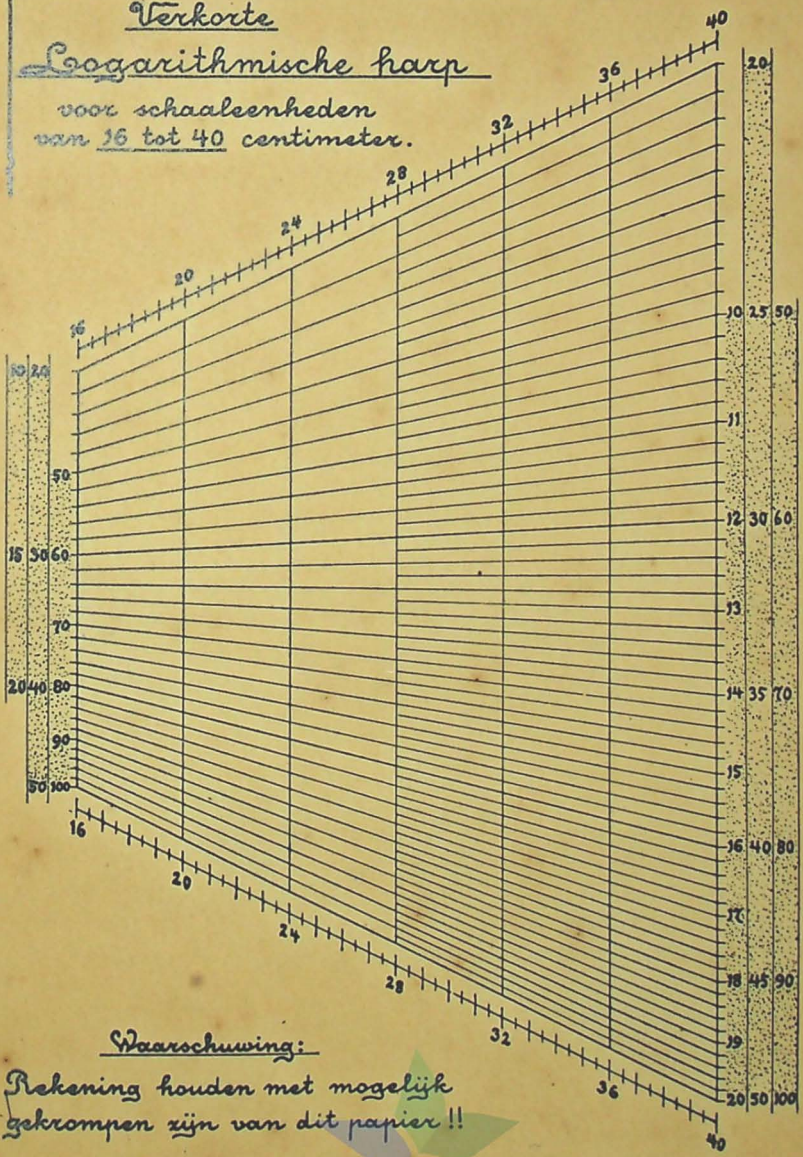
$$x = \frac{n \ln z}{n \ln 10} = \frac{\ln z}{m} = {}_{10} \log z \quad (13)$$

waarin $m = \ln 10 = 2,30259 \dots$

- Onverschillig welke waarde n heeft, is dus steeds voor $z = 1$, $x = 0$ en voor $z = 10$, $x = 1$.

Verkorte
Logarithmische harp

voor schaal eenheden
van 16 tot 40 centimeter.



Waarschuwing:

Rekening houden met mogelijk
gekrompen zijn van dit papier !!

Fig. 19.

duiden die waarde aan met de grieksche letter ν (nu). Deze is dan de *gewenschte middenwaarde* van de schaal. Bijgevolg moet

$$f(\nu) \approx \frac{f(\alpha) + f(\omega)}{2} \quad (14)$$

Bij een regelmatige schaal, moet dus

$$\nu \approx \frac{\alpha + \omega}{2} \quad (15)$$

bij een logarithmische schaal,

$$\nu \approx \sqrt{\alpha\omega} \quad (16)$$

en bij een reciproke schaal,

$$\nu \approx \frac{2\alpha\omega}{\alpha + \omega} \quad (17)$$

, enz.

Omvat het bereik van een veranderlijke de waarden van een eindig getal tot oneindig toe, dan zal meestal een projectieve schaal gewenscht zijn. Komt $z = 0$ niet in dat bereik voor, dan is ook een macht-schaal met een kleine negatieve exponent mogelijk.

¹⁾ Deze drie waarden zijn onderscheidenlijk het rekenkundig, meetkundig en harmonisch gemiddelde van α en ω . Zie ook het in figuur 84 afgebeelde nomogram.



HOOFDSTUK 9.

Dubbelschalen.

§ 45. In hoofdstuk 4 is de dubbelschaal reeds in het kort, in haar verband tot andere voorstellingswijzen, besproken. Wij kunnen ons dus nu bepalen tot het bespreken van de constructie.

Een betrekking tusschen twee veranderlijken kan door een onbeperkt aantal verschillende dubbelschalen worden voorgesteld, daar bij een willekeurige functieschaal voor een der veranderlijken, steeds een bijpassende voor de andere kan worden geconstrueerd.

Hieraan dankt de dubbelschaal haar geschiktheid, om, — bij een door een schalennomogram voorgestelde betrekking tusschen drie veranderlijken —, nevenbetrekkingen van die veranderlijken voor te stellen.

Wij spreken in dat geval van een **gebonden dubbelschaal**, omdat de tweede functieschaal zich dan moet aanpassen aan een reeds aanwezige functieschaal. In tegenstelling daarmee spreken wij van een **vrije dubbelschaal**, wanneer men in de keuze van een der beide functieschalen geheel vrij is.

§ 46. Constructie van vrije dubbelschalen.

a. Wanneer de betrekking gegeven is als een vergelijking met gescheiden veranderlijken $f_1 = f_2$.

In het meerendeel van de in de practijk voorkomende formules met twee veranderlijken, zijn deze gemakkelijk te scheiden. Dit is meestal op verschillende wijzen mogelijk, zoodat wij een vorm kunnen kiezen, welke zoo gunstig mogelijke functieschalen geeft en waarbij dus het waardenstel v_1, v_2 , ongeveer in het midden ligt.

Die functieschalen worden dan geconstrueerd met de formules

$$\left. \begin{aligned} x &= \mu f_1 \\ x &= \mu f_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

, waarbij de modulus μ op de vroeger beschreven wijze uit de beschikbare schaalengte L en het functiebereik k wordt bepaald.

Voorbeeld.

Wij komen nogmaals terug op de betrekking

$$v = \sqrt{2gh}$$

, welke in figuur 4 door een snijkromme, in figuur 5 door een raakromme en in figuur 6 door een dubbelschaal is voorgesteld.

Deze betrekking is o.a. op de volgende wijzen met gescheiden veranderlijken te schrijven; de twee schalen $[v]$ en $[h]$ zijn daarbij telkens anders.

	$[v]$	$[h]$
$v = \sqrt{2gh}$	regelmatig	\sqrt{h}
$\frac{v^2}{2g} = h$	kwadratisch	regelmatig
$2 \log v = \log h + \log 2g$	logaritmisch	logaritmisch
$\frac{v^2}{v^2 + 2g} = \frac{h}{h + 1}$	$\frac{v^2}{v^2 + 2g}$	segmentair
	enz.	

Voor de 4 schalen $[v]$ is v achtereenvolgens ongeveer 5,5; 7; 3,2 en 3,6. Daar voor de stroomsnelheid v de meest gebruikte waarde omstreeks 2 à 3 meter per seconde is en de constructie van logaritmische schalen gemakkelijker is dan van andere functie-schalen, is voor figuur 6 uitgegaan van den vorm:

$$2 \log v = \log h + \log 2g$$

en zijn ter weerszijden op den drager uitgezet de schalen

$$x = 2\mu \log v$$

$$\text{en } x = \mu \log h + \mu \log 2g.$$

Daar $x = 0$ voor $v = 1$, ligt bij dit schaalpunt de oorsprong van de dubbelschaal.

Andere voorbeelden.

Een zevental dubbelschalen is in figuur 20 bijeen geteekend, onder meer, om door het samenvoegen op één bladzijde te laten zien, dat deze voorstellingswijze weinig ruimte noodig heeft en toch een nauwkeurige aflezing toelaat.

Van links naar rechts stellen deze dubbelschalen de volgende betrekkingen voor:

10. Herleiding van centimeters tot engelse duimen (inches):
 $z_1 = 2,53995 z_2$.

20. Verband tusschen de hoeveelheid arbeidsvermogen uitgedrukt in Kilowatt (K) en in Paardekrachten (P): $K = 0,736 P$.

30. Omzetting van temperaturen gemeten in graden Celsius en in graden Fahrenheit: $t_F = 1,8 t_C + 32$

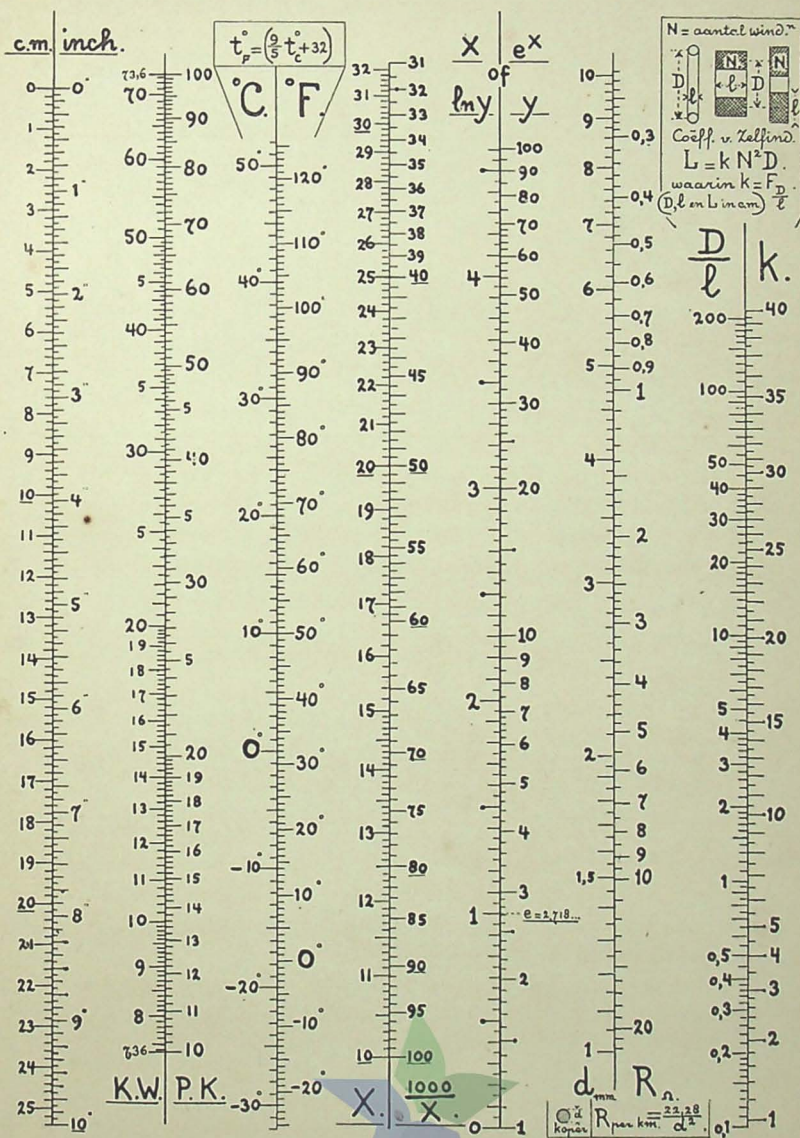


Fig. 20.

4^o. Berekening van reciproke waarden

$$z_2 = \frac{z_1}{1000}$$

Deze betrekking is symmetrisch (zie § 33). Een dubbelschaal welke een symmetrische betrekking voorstelt, behoeft slechts een bereik te omvatten eenerzijds gaande tot een waardenstel $z_1 = z_2$. In ons geval dus tot $z = \sqrt{1000} \approx 31,62$.

5^o. Neperiaansche logarithmen van de getallen 1 tot 100 en — omgekeerd — machten van e (= 2,718 . . .) van 0 tot 4,6.

6^o. Weerstand van een koperen geleiding van d mm. dikte over 1 km lengte

$$R = \frac{22,28}{d^2}$$

De weerstand wordt uitgedrukt in Ω (Ohm). Voor $10 \times$ kleinere (grootere) waarden van d wordt R $100 \times$ grooter (kleiner).

Toepassing van deze dubbelschaal:

Een kabel met een kern van 6 koperdraden van 0,4 mm. dikte heeft dus een weerstand van $\frac{1}{6} \times 139 \approx 23,3 \Omega$ per km.

7^o. Zie het voorbeeld aan het einde dezer paragraaf.

b. *Wanneer de betrekking gegeven is als een tabel, een grafiek of een vergelijking, waarvan de veranderlijken niet gescheiden kunnen worden.*

In al deze gevallen moeten wij, c.q. met behulp van een grafiek, een tabel afleiden, welke voor één der veranderlijken een uitgebreide reeks van regelmatig opklimmende ronde waarden geeft.

Een **voorbeeld** van een vergelijking, waarvan de veranderlijken niet gescheiden kunnen worden is b.v.

$$a^n = a + n$$

Stellen wij

$$a^n = z_1$$

en

$$a + n = z_2$$

, en geven deze vergelijkingen weer op een z.g. enkel logarithmisch net, waarvoor

$$x = n$$

$$y = \log a$$

, dan verkrijgen wij daarop een bundel rechten (z_1) en een bundel krommen (z_2). Verbinden wij daarna alle punten waarvoor $z_1 = z_2$ door een kromme, dan is deze de voorstelling van de betrekking tusschen a en n . Lezen wij nu voor opklimmende ronde waarden van n de bijbehorende waarden van a af, dan verkrijgen wij de tabel, welke noodig is voor het vervaardigen van een dubbelschaal.

Deze wordt aldus vervaardigd, dat voor de veranderlijke, welke **niet** door een reeks opklimmende ronde waarden wordt voorgesteld, een functieschaal wordt uitgekozen.

De keuze zal meestal gaan tusschen een regelmatige en een logaritmische schaal, wegens de gemakkelijke constructie van beiden. Is het relatieve bereik van de beide veranderlijken groot, dan zal de logaritmische schaal wel de voorkeur verdienen.

De deelstrepen voor de ronde waarden van de tweede veranderlijke, worden daarna op hunne plaatsen tegenover de gereed zijnde functieschaal geteekend. Is de verdeling van deze tweede schaal nu nog onvoldoende, dan kunnen de verdere deelpunten met behulp van een interpolator worden bepaald.

Voorbeeld.

De meest rechte dubbelschaal van figuur 20 dient voor het bepalen van de zelfinductie van spoelen. De beteekenis van **N**, **l** en **D** is in de figuur boven de dubbelschaal verklaard. De zelfinductie is

$$L = kN^2D,$$

in welke formule **k** een coëfficiënt is, afhankelijk van $\frac{D}{l}$.

De betrekking tusschen **k** en $\frac{D}{l}$ is door CURSEY uit metingen bepaald. Uit de tabel van gemeten waarden heeft hij een grafische voorstelling afgeleid, bestaande uit een kromme op een regelmatig net.

In figuur 20 is voor $\frac{D}{l}$ een logaritmische schaal gekozen, omdat het bereik tamelijk groot is en overal een gelijke relatieve nauwkeurigheid gewenscht is.

Uit de grafiek van CURSEY zijn daarna voor ronde waarden van **k** de bijbehorende waarden van $\frac{D}{l}$ bepaald. Uit deze tabel werd aan de andere zijde van den drager de schaal voor **k** verkregen.

Toepassing van de dubbelschaal.

Bereken de zelfinductie van een spoel met 200 windingen, een binnenmiddellijn van 4 c.m., een buitenmiddellijn van 9 c.m. en een breedte van 1,8 c.m.

Dus: $N = 200$ $D = 6,5$ $l = 1,8$

$$\frac{D}{l} = 3,61 \quad \text{dus} \quad k = 13,8,$$

bijgevolg

$$L = 13,8 \times 200^2 \times 6,5 =$$

$$= 3,59 \times 10^6 \text{ c.m. (electr. magn.)} = 0,00359 \text{ heury} = 3590 \text{ microheury } (\mu\text{H}).$$

§ 47. Constructie van gebonden dubbelschalen.

a. Wanneer de betrekking gegeven is als een vergelijking met gescheiden veranderlijken $f_1 = f_2$.

Een der functieschalen heeft nu reeds vooraf een bepaalden vorm ¹⁾. Stel b.v. dat deze geconstrueerd is met de constructieformule

$$x = \mu g_1.$$

Dan zal dus $f_1 = f_2$ herleid moeten worden tot een vergelijking $g_1 = g_2$, waarna $[z_2]$ geconstrueerd kan worden met de formule

$$x = \mu g_2.$$

Voorbeeld.

In figuur 9 moest voor de voorstelling van de betrekking

$$L = \frac{100 \sin \alpha}{r^2}$$

een functieschaal voor α geconstrueerd worden met de formule

$$x = -\mu \log \sin \alpha.$$

Met gebruikmaking van deze functieschaal willen wij voorstellen de betrekking

$$\cotg \alpha = s.$$

Hiertoe herleiden wij deze vergelijking tot

$$-\log \sin \alpha = \frac{1}{2} \log (s^2 + 1),$$

zoodat de functieschaal $[s]$ geconstrueerd kan worden met de formule

$$x = \frac{1}{2} \mu \log (s^2 + 1).$$

b. Wanneer de betrekking gegeven is als een tabel, enz.

De constructie geschiedt als voor de vrije dubbelschaal is beschreven, met deze beperking, dat nu de schaal voor een der veranderlijken reeds aanwezig is. Bij het bepalen van de reeks waardenstellen moeten dus voor de **andere** veranderlijke de ronde waarden worden genomen.

Op deze wijze heeft ook de constructie plaats van een dubbelschaal, waarbij gebruik moet worden gemaakt van een reeds aanwezige functieschaal op een gebogen drager.

N.B. Aan het einde van Deel II volgt een aantal opgaven voor de constructie van dubbelschalen.

¹⁾ Wij veronderstellen dat de drager recht is; is dat niet het geval, dan wordt de methode volgens **b** gebezigd.

HOOFDSTUK 10.

Indeeling van functievergelijkingen naar hunne Nomografische orde.

§ 48. Wij onderscheiden in de Nomografie twee groepen functievergelijkingen.

a. Uitgaande van de verschillende vormen, welke het schaalnomogram kan hebben, en de constructie daarvan, geraken wij tot eenige **bijzondere of typische functievergelijkingen**, welker karakter bepaald is door twee voorwaarden:

- 1^o. dat zij den uitgangsvorm moeten wezen voor de constructie van het nomogram;
- 2^o. dat zij daarbij zóó eenvoudig moeten zijn, dat men hen gemakkelijk kan onthouden.

b. Het herleiden van een of andere, door een nomogram voor te stellen vergelijking, tot den vorm van een der bijzondere functievergelijkingen (het z.g. *scheiden van de veranderlijken* der gegeven vergelijking), heeft plaats door na te gaan onder welke z.g. **algemeene functievergelijking** die gegeven vergelijking valt. Zulk een algemeene functievergelijking moet:

- 1^o. een zoo groot mogelijke, doch bij voorkeur toch een bepaalde groep van vergelijkingen omvatten, hetzij door een zeer eenvoudigen vorm, hetzij door het bezit van een groot aantal door letters aangegeven, d.w.z. *vrije* coëfficiënten.
- 2^o. op eenvoudige wijze herleidbaar zijn tot een der bijzondere functievergelijkingen onder a genoemd.

§ 49. De bijzondere en algemeene functievergelijkingen met drie veranderlijken zijn door SOREAU ingedeeld naar hunne **Nomografische orde**.

Wij kunnen dit het best toelichten aan een voorbeeld.


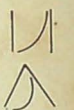



De (bijzondere) functievergelijking voor het z.g. kegelsnedenomogram

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$$

, behoort tot de **4e orde**, omdat er 4 verschillende functies in voorkomen, n.l. f_1 , f_2 , f_3 en g_3 .

Is in die vergelijking echter $g_3 = af_3 + b$, dan is ze slechts

Nomogramvormen en bijzondere en

type:	bijzondere functievergelijking	nomogr. orde	eenvoud. nom. vorm
II III V VI	$f_1 g_3 + f_2 = 0$ $f_1 + f_2 = f_3$ $\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$ $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	3e orde	
I IV	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	4 ^e orde	
IX	$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$	4e orde	
VIII	$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = f_3$	5e orde	
VII	$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}$	6e orde	

algemeene functievergelijkingen.

andere vormen	algemeene functievergelijkingen
<p>2 schalen op een kegelsnede + 1 rechte schaal en 3 schalen op een kubische kromme.</p>	<p><i>algemeene functievergelijking van de 3e orde:</i> $A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad (d)$</p>
<p><i>bijzonder geval:</i> de kromme schaal ligt op een cirkelboog (typen Ia en IVa).</p>	<p><i>1e algemeene functievergelijking van de 4e orde:</i> $\Phi_{12} \xi_3 + \Psi_{12} = \epsilon_3$ waarin: $\Phi_{12} = \frac{a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3}{c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3}$ en $\Psi_{12} = \frac{b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3}{c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3} \quad (b)$</p> <p><i>2e algemeene functievergelijking van de 4e orde:</i> $f_1 f_2 F_3 + f_1 G_3 + f_2 H_3 + K_3 = 0$ waarin: $\alpha F_3 + \beta G_3 + \gamma H_3 + K_3 = 0 \quad (c)$</p>
<p><i>bijzonder geval:</i> de 2 kromme schalen liggen op een gemeensch. draager.</p>	
<p><i>bijzonder geval:</i> 2 of 3 kromme schalen liggen op een gemeensch. draager.</p>	<p>$\Phi_{12} g_3 + \Psi_{12} = f_3 \quad (a)$</p>

schijnbaar van de 4e orde, in werkelijkheid echter van de 3e orde, omdat er, na substitutie van die lineaire betrekking, nog maar 3 verschillende functies in voorkomen.

Evenzoo is de functievergelijking

$$f_1G_3 + f_2H_3 = F_3$$

niet van de 5e, maar van de 4e orde, daar bij deeling van de termen, b.v. door H_3 , deze functievergelijking overgaat in het type

$$f_1g_3 + f_2 = f_3$$

Elke functievergelijking is dus minstens van de 3e orde; de bijzondere functievergelijkingen bedoeld onder **a** zijn van de 3e, 4e, 5e of 6e orde.

Een betrekking welke herleid kan worden tot den vorm van een der bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde, is ook volgens elk der andere bijzondere functievergelijkingen van die orde te schrijven.

Voor de 4e orde geldt hetzelfde slechts voor de bijzondere functievergelijkingen I en IV. Daar zij te zamen een bijzonder geval zijn van de algemeene functievergelijking van die orde (zie Deel IV), wordt hun orde aangeduid als de 4_0^0 orde.

Wanneer een algemeene functievergelijking als bedoeld onder **b**, alle door een schaalnomogram voor te stellen vergelijkingen van een orde omvat, dan wordt zij de **algemeene functievergelijking van die orde** genoemd.

De te behandelen bijzondere en algemeene functievergelijkingen (voor de laatste zie Deel IV) zijn samengevoegd in tabel II op blz. 56 en 57.



Opgaven 1 t/m. 21 voor de constructie van dubbelschalen.

1. Oppervlakte van een cirkelvormige doorsnede, $O = \frac{1}{4}\pi d^2$.
2. Dubbelschaal $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ voor de betrekking $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.
3. Dubbelschaal $\log x$, $\ln x$ voor de betrekking
 $\log x = 0,4343 \ln x$.
4. Dubbelschaal voor $x = \sqrt[3]{y}$.
5. Dubbelschaal: Engelsche mijlen, km.
(1 Eng. mijl = 1,524 km.)
6. Dubbelschaal: Liters per sec., m³ per uur.
(1 L. per sec. = 3,6 m³ per uur).
7. Dubbelschaal: Engelsche ponden, kg.
(1 Eng. pond = 0,4536 kg.)
8. Globale betrekking tusschen winddruk en windsnelheid.
 $K = 0,12 v^2$. (K in kg/m², v in m/sec.)
9. De straal **R** (in m.) van het gezichtsveld, van een vliegtuig op **h** m. hoogte, is ongeveer

$$R = 12000 \sqrt{0,1 \bar{h}}$$

(Le Heux).

10. Betrekking tusschen het aantal ampèrewindingen per cm. en de sterkte van de magnetisatie in Gauss bij dynamoblik (zie voor de tabellarische of grafische voorstelling van deze betrekking een of ander leerboek over de constructie van elektrische machines).

11. Als $\lambda = \frac{b}{a}$ de verhouding is van kleine tot groote as van een ellips, en **e** is de excentriciteit, — dat is de verhouding van den afstand der brandpunten tot de lengte van de groote as van de ellips —, dan is $e = \sqrt{1 - \lambda^2}$

12. Dubbelschaal H.P., P.K., als 1 H.P. (horsepower) = 1,0139 P.K.

13. Het aantal gramcalorieën, noodig voor het verwarmen van 1 cm³. droge lucht van t° C. tot 100° C., is

$$c = \frac{84,63 (100 - t)}{273 + t} \quad (\text{Grosse}).$$

14. Bij gemiddelde temperatuur (ongeveer 10° C.) en een barometerstand van 760 mm. kwikdruk op het aardoppervlak, is het

verband tusschen de stijghoogte H in km. en de luchtdruk B in mm. kwikdruk, voor een bereik van B van 760 tot 400, globaal

$$H = 19 (2,88 - \log B).$$

15. Dubbelschaal voor de betrekking tusschen leeftijd en sterftekans. (Naar een sterftetafel.)

16. Dubbelschaal voor $A_h = B_{max}^{1,6}$, waarin A_h evenredig is met het hysteresisverlies per cm^3 en per periode, en B_{max} de maximum inductie is.

17. Is t de tijd in sec., waarin een auto of ander voertuig 1 km. aflegt, dan is de snelheid van dat voertuig $n = \frac{3600}{t}$ km. per uur.

18. De sterkte der koppeling van twee inductief gekoppelde ketens, is volgens ZENNECK

$$k = \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}$$

, waarin γ de verhouding der twee golf lengten is. Het voor γ aan te nemen bereik is 1,001 tot 2.

19. Wet van STEFAN-BOLTZMANN:

$$S = 5,75 \left(\frac{T}{1000} \right)^4,$$

waarin S de energie is in Watt per sec., uitgestraald door $1 cm^2$. van een zwart lichaam met een absolute temperatuur T .

20. De antennefactor α wordt afgeleid uit de verhouding n van de lengte van het horizontale gedeelte van L-antennes, of de helft van die lengte bij T-antennes, tót de hoogte der antenne; met behulp van de formule

$$\alpha = 0,637 (1 + n) \sin \frac{90^\circ}{1 + n}$$

21. De kimduiking k in boogminuten, is, rekening houdende met een gemiddelde straalbuiging, te berekenen uit de ooghoogte h in meters, met de formule

$$k = 1,79 \sqrt{h}.$$



DEEL III.

DE CONSTRUCTIE VAN
SCHAALNOMOGRAMMEN VOOR BETREKKINGEN
MET DRIE VERANDERLIJKEN.

A.

NOMOGRAMMEN OP EEN RECHT SCHALENSTEL.

HOOFDSTUK 11.

Algemeene inleiding. Dualiteit van grafische voorstellingen.

§ 50. Zoals wij in hoofdstuk 5 zagen, is het *schaalnomogram* een grafische voorstelling, waarbij als grondfiguur een *schalenstel* wordt gebezigd. In Deel III A bepalen wij ons tot het geval, dat dit schalenstel uit *rechte* schalen bestaat. Er zijn daarbij twee mogelijkheden, n.l.:

- 1^o. de twee rechte schalen zijn evenwijdig;
- 2^o. de twee rechte schalen snijden elkander.

Wij onderscheiden bijgevolg:

- ad 1^o. *Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel*;
ad 2^o. *Nomogrammen op een snijdend schalenstel*.

$[z_1]$ en $[z_2]$ vormen steeds de schalen van het schalenstel, de dragers daarvan worden ook wel **assen** genoemd. Bij het evenwijdig schalenstel is er op elk der assen een oorsprong (O_1 en O_2), bij het snijdend schalenstel is het snijpunt de gemeenschappelijke oorsprong O .

De lijn O_1O_2 bij het evenwijdig schalenstel heet **oorspronglijn**, de lengte O_1O_2 , in c.m. gemeten, wordt aangeduid met de grieksche letter δ .

De derde schaal, $[z_3]$, kan krom of recht en op verschillende wijzen ten opzichte van $[z_1, z_2]$ gelegen zijn. In verband daarmee onderscheiden wij de volgende nomogramvormen, zoowel bij een evenwijdig als bij een snijdend schalenstel:

- a. het algemeene geval, d.w.z. $[z_3]$ is krom.
- b. $[z_3]$ is recht en //, c.q. concurrent met $[z_1, z_2]$.

c. $[z_3]$ is recht en snijdt $[z_1, z_2]$.

d. $[z_3]$ is een kegelsnede, welke tot een cirkel kan worden vervormd.

§ 51. Dualiteit van grafische voorstellingen.

Er bestaat tusschen de schaalnomogrammen en de uit bundels rechten samengestelde grafieken een zekere omkeerbaarheid, **dualiteit** genoemd, welke in de omschrijving van eigenschappen, bewijzen of constructies, door het vervangen van een gering aantal meetkundige termen, tot uitdrukking kan worden gebracht.

De bedoelde meetkundige termen zijn in de eerste plaats de begrippen

<i>punt</i>	en	<i>rechte lijn</i>
<i>verbinden</i>	en	<i>snijden</i>

, die ten grondslag liggen aan de gekozen voorstellingswijzen voor een „waarde” en een „waardenstel”.

Daar bij een **rechte schaal** alle *genummerde punten* tot een *rechte lijn verbonden* zijn, staat dualistisch daartegenover de **waaier**, waarbij alle *genummerde rechte* lijnen elkaar in één *punt snijden*.

De *drager van de schaal* is dus ook dualistisch met den *top van de waaier*.

Met een *schalenstel, bestaande uit twee rechte schalen*, is dus dualistisch het *net, gevormd door twee waaiers*, terwijl dan tegenover het *snijpunt van de dragers van de schalen*, de *verbindingslijn van de toppen der waaiers* staat.

Bij het evenwijdig schalenstel ligt dat snijpunt in het oneindige. Duaal hiermede is dus het net gevormd door twee waaiers, waarvan de verbindingslijn der toppunten in het oneindige ligt.

Die toppunten liggen dus ook zelf in het oneindige en elk der beide waaiers wordt in dat geval een evenwijdige bundel.

Bijgevolg zijn dualistisch:

het evenwijdige schalenstel en het net bestaande uit twee evenwijdige bundels; evenzoo

het snijdend schalenstel en het net gevormd door twee waaiers.

In figuur 21 is een en ander verduidelijkt.

De dualiteit strekt zich nog verder uit. Een waardenstel wordt weergegeven, eenerzijds door de *lijn*, anderszijds door het *punt S*.

Wordt een betrekking tusschen de twee veranderlijken van het net door een *rechte P* daarop weergegeven, dan gaan op het schalenstel alle afleeslijnen door een *gemeenschappelijk snijpunt P*.

Een stralenbundel op het net is dus dualistisch met een *schaal* op het schalenstel.

Is die stralenbundel (z_3) weer een *waaier*, dus hebben de rechte lijnen van den bundel een gemeenschappelijk snijpunt, dan is de schaal $[z_3]$, op het schalenstel, een *rechte schaal*.

Een nomogram bestaande uit *drie rechte schalen* is dus dualistisch met een grafiek gevormd door *drie elkaar snijdende waaiers*.

Dualiteit van Grafische Voorstellingen.

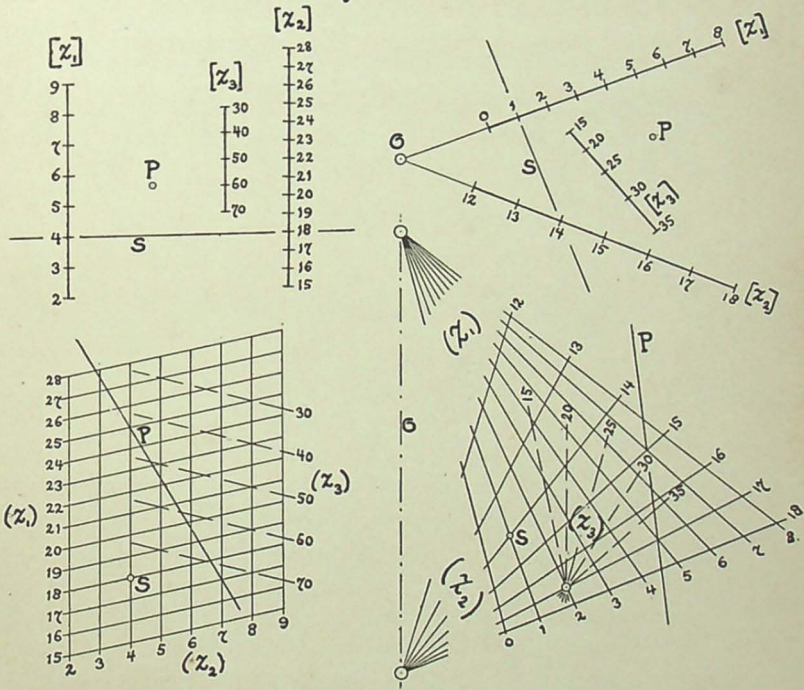


Fig. 21.

Is op het net gevormd door twee evenwijdige bundels, de derde bundel ook een evenwijdige, dan ligt de top van deze dus in het oneindige. De drager $[z_3]$ zal dan $[z_1]$ en $[z_2]$ in oneindig verre punten snijden en loopt er bijgevolg evenwijdig mede.

Ligt op het net gevormd door twee waaiers, de top van den derden waaier op de verbindingslijn O der beide andere waaier-toppen, dan gaat bij het schaalnomogram de drager $[z_3]$ door den oorsprong O van het snijdend schalenstel.

HOOFDSTUK 12.

Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel.

Type I: De derde schaal is een kromme schaal.

Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules.

§ 52. In fig. 22 is $[z_1]$ een functieschaal voor $x = \mu_1 f_1$ met oorsprong O_1 , en $[z_2]$ een functieschaal voor $y = \mu_2 f_2$ met oorsprong O_2 ¹⁾. De afstand $O_1 O_2$ wordt, zooals reeds vermeld is, aan-

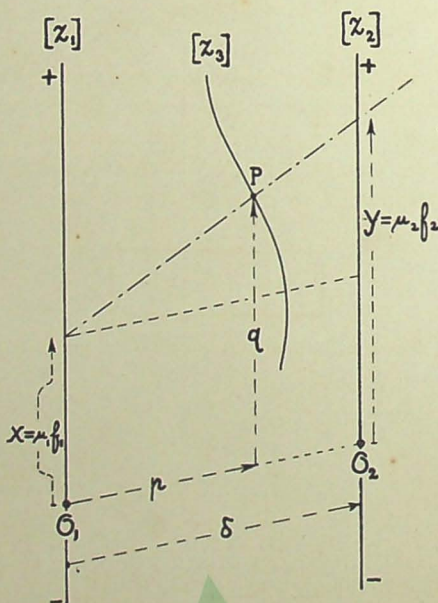


Fig. 22.

geduid met δ . De plaats van een willekeurig punt P van het tekenvlak, wordt bepaald door zijn cartesische coördinaten p en q .

¹⁾ In figuur 22 en in een aantal volgende figuren, is alleen de drager en c. q. de oorsprong van de schalen geteekend.

Uit de gelijkvormigheid van de twee driehoeken, in figuur 22 gelegen tusschen de afleeslijn door P en een rechte evenwijdig aan de oorspronglijn, blijkt:

$$\frac{y-x}{q-x} = \frac{\delta}{p}$$

dus
$$y-x = \frac{q}{p}\delta - x \frac{\delta}{p}$$

of
$$x\left(\frac{\delta}{p} - 1\right) + y = \frac{q}{p}\delta.$$

Substitueer hierin $x = \mu_1 f_1$ en $y = \mu_2 f_2$, dan is:

$$f_1 \cdot \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\delta}{p} - 1 \right) \right\} + f_2 = \frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu_2}$$

De beide met een accolade aangegeven vormen zijn functies van z_3 en dus mogen wij

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\delta}{p} - 1 \right) = g_3 \quad \text{en} \quad \frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu_2} = f_3 \quad (19)$$

stellen.

Door eliminatie van z_3 uit de beide laatste vergelijkingen, ontstaat een verband tusschen p en q , n.l. de vergelijking van den drager $[z_3]$. Elke waarde van z_3 bepaalt daarop een schaalpunt.

De substitutie van (19) in de voorafgaande vergelijking, geeft als **functievergelijking** voor het algemeene geval dat de derde schaal een kromme schaal is:

$f_1 g_3 + f_2 = f_3$

(I)

§ 53. De **constructieformules** voor dit nomogramtype zijn:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] \quad y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] \quad p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_2 g_3 + \mu_1} \quad q = \frac{\mu_1 \mu_2 f_3}{\mu_2 g_3 + \mu_1} \end{array} \right\} (20)$$

De twee laatstgenoemde vormen voor p en q volgen uit (19).

Stel verder $g_3 = F(f_3)$, dus $\quad = F\left(\frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu_2}\right)$,

dan is dus de **vergelijking van den drager** $[z_3]$:

$$p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_2 F\left(\frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu_2}\right) + \mu_1} \quad (21)$$

Is g_3 niet explicite in f_3 uit te drukken, dan kan de vergelijking van den drager met behulp van de formules (19) worden gevonden.

§ 54. Constructie van $[z_3]$ door projectie.

Eenvoudiger dan door berekening met (20), kunnen de deel-

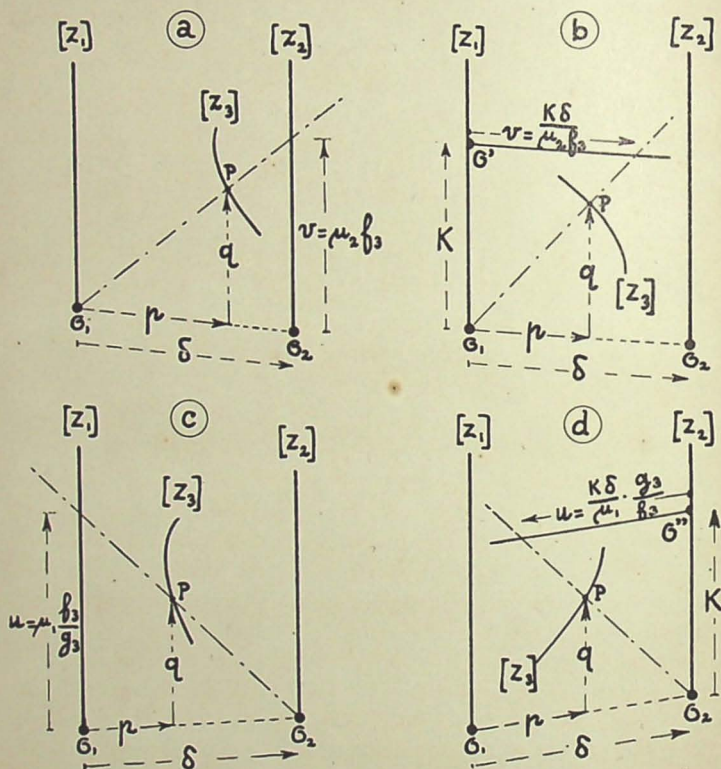


Fig. 23.

punten $[z_3]$ meestal verkregen worden als snijpunten van projectielijnen uit O_1 en O_2 , n.l.:

Uit O_1 ,

naar een schaal $v = \mu_2 f_3$ op de as $[z_2]$ figuur 23a

, of naar een schaal $v = \frac{K\delta}{\mu_2 f_3}$, op een drager evenwijdig aan $O_1 O_2$, met zijn oorsprong O' op de as $[z_1]$, op een afstand K van O_1 figuur 23b.

en uit O_2 ,

naar een schaal $u = \mu_1 \frac{f_3}{g_3}$ op de as $[z_1]$
 figuur 23c.

, of naar een schaal $u = \frac{K\delta}{\mu_1} \cdot \frac{g_3}{f_3}$, op een drager evenwijdig aan O_2O_1 , met zijn oorsprong O'' op de as $[z_2]$ op een afstand K van O_2 figuur 23d.

Zoowel bij projectie uit O_1 als uit O_2 , is K een naar verkiezing aan te nemen afstand.

Ook andere punten en lijnen kunnen voor de projectieve constructie van $[z_3]$ als toppunt en drager gekozen worden.

§ 55. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Bereken achtereenvolgens de functielengten en de moduli voor $[z_1]$ en $[z_2]$:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f_1(\omega_1) - f_1(\alpha_1) \\ \mu_1 &\approx \frac{L}{k_1} \end{aligned} \right| \begin{aligned} k_2 &= f_2(\omega_2) - f_2(\alpha_2) \\ \mu_2 &\approx \frac{L}{k_2} \end{aligned}$$

Bereken nu: $\mu_1 f_1(\alpha_1)$, $\mu_1 f_1(\omega_1)$, $\mu_2 f_2(\alpha_2)$, $\mu_2 f_2(\omega_2)$ ¹⁾ en voorts p en q voor α_3 en ω_3 .

Teeken daarna, bij wijze van proef, de schaalengten $[z_1]$ en $[z_2]$, met een willekeurigen afstand δ tusschen de beide oorsprongen, en bepaal de plaats van de uiterste schaalpunten van $[z_3]$.

Nu zal in 't algemeen $[z_3]$ bij voorkeur middenschaal moeten zijn, omdat anders het beschikbare teekenvlak slecht wordt benut, of, — erger nog —, de schaal $[z_3]$ door het oneindige zou kunnen gaan. Mocht $[z_3]$ bij de geteekende situatie geen middenschaal zijn en is dat toch gewenscht, dan is het voldoende één der schalen $[z_1]$ of $[z_2]$ om te keeren, hetgeen neerkomt op het schrijven van (I) volgens een der vormen:

$$\left. \begin{aligned} (-f_1) \cdot (-g_3) + f_2 &= f_3 \\ f_1 \cdot (-g_3) + (-f_2) &= -f_3. \end{aligned} \right\} (22)$$

Wordt met de berekende moduli geen nomogram verkregen, waarvan de onderlinge ligging en de lengte der drie schalen ons bevredigt, dan zal tóch de gemaakte schets in 't algemeen voldoende aanwijzingen geven voor de veranderingen, welke de gekozen moduli zullen moeten ondergaan, om tot een geschikt nomogram te geraken.

¹⁾ Er is geen bezwaar tegen, in $f_1(\alpha_1)$, enz. de index bij α , enz. weg te laten, daar het geen twijfel geeft, dat hier α_1 , enz. wordt bedoeld.

Tweede Wet van Kepler.

(Wet der perken)

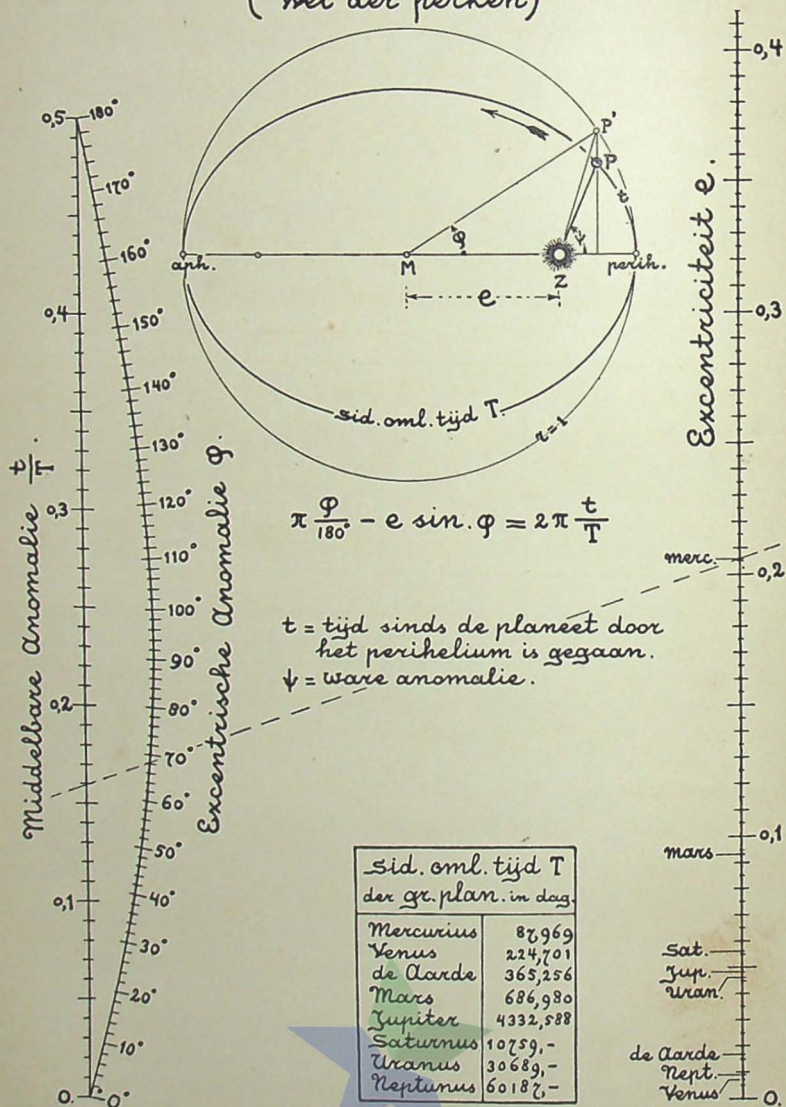


Fig. 24.

§ 56. **Voorbeeld.** *Tweede wet van Kepler. (Wet der perken)*. (figuur 24).

Voor de berekening van de plaats der planeten aan den hemel dient de uit de tweede wet van Kepler voortvloeiende betrekking tusschen de excentriciteit der loopbaan e , de middelbare anomalie $\frac{t}{T}$ en de excentrische anomalie φ :

$$\pi \frac{\varphi}{180^\circ} - e \sin \varphi = 2\pi \frac{t}{T}$$

Deze betrekking wordt volgens functievergelijking (I) geschreven als

$$e \sin \varphi + 2\pi \frac{t}{T} = \pi \frac{\varphi}{180^\circ}.$$

De aangenomen grenzen der veranderlijken zijn:

	α	ω
voor $f_1 \dots \dots \dots e$	0	0,415 ¹⁾
„ $f_2 \dots \dots \dots 2\pi \frac{t}{T}$	0	0,5
„ $f_3 \dots \dots \dots \pi \frac{\varphi}{180^\circ}$	} 0°	180°
„ $g_3 \dots \dots \dots \sin \varphi$		

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 24 ²⁾ werd de gewenschte schaallengte $L \approx 32$ genomen. Dus was:

$k_1 = 0.415$	$k_2 = \pi = 3,1416$
$\mu_1 \approx \frac{32}{0,415}$	$\mu_2 \approx \frac{32}{\pi}$
aangenomen $\mu_1 = 80$	aangenomen $\mu_2 = \frac{30}{\pi}$

Dus is: $\mu_1 f_1(\alpha) = 0$
 $\mu_1 f_1(\omega) = 33,2$
 $\mu_2 f_2(\alpha) = 0$
 $\mu_2 f_2(\omega) = 30$
 voor α_3 is $p = \delta$ en $q = 0$
 voor ω_3 is $p = \delta$ en $q = 30$

¹⁾ De excentriciteit van de banen der planeten en planetoiden ligt binnen dit bereik.

²⁾ In het nomogram figuur 24 zijn $[z_1]$ en $[z_2]$ van plaats verwisseld, dus ligt $[z_1]$ rechts, $[z_2]$ links en wordt p dus van O_1 uit naar links gemeten.

$[z_3]$ heeft dus met $[z_2]$ de eindschaalpunten gemeen. Om de ligging van $[z_3]$ nader te weten, bepalen wij nog het schaalpunt $z_3 = 90^\circ$. Hiervoor is $p = 0,893 \delta$ en $q = 13,4$.

Daar een discontinu verloop uitgesloten is, zal $[z_3]$ een flauw gebogen schaal zijn, welke door $[z_2]$ als koorde wordt overspannen.

Voor de constructie van figuur 24 namen wij aan, dat deze ligging ons bevredigde. Stel nu nog $\delta = 20$, dan waren dus de constructieformules:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } [z_1] & x = 80e \\ \text{„ } [z_2] & y = 60 \frac{t}{T} \\ \text{„ } [z_3] & p = \frac{160}{3 \sin \varphi + 8} \qquad q = \frac{4 \frac{\varphi}{3^\circ}}{3 \sin \varphi + 8} \end{array}$$

$[z_3]$ werd echter niet geconstrueerd met behulp van laatstgenoemde formules, maar door de snijding van projectielijnen,

uit O_1 , naar een schaal $v = 0,2 \varphi$, evenwijdig aan en op een afstand $p = 1,2 \delta$ van $[z_1]$, met den oorsprong op het verlengde van O_1O_2 ;

en uit het schaalpunt $z_1 = \frac{\pi}{10}$ naar een schaal $v = \frac{\varphi}{6^\circ} - 3 \sin \varphi$ op de as $[z_2]$.

Toepassing van het nomogram:

Welke excentrische anomalie φ heeft Mercurius, juist 2 weken nadat deze planeet door het perihelium is gegaan?

De middelbare anomalie is dan

$$\frac{t}{T} = \frac{14}{87,969} = 0,1592$$

Met behulp van de door $z_1 = 0,206$ (Merc.) en $z_2 = 0,1592$ te leggen afleeslijn (zie stippellijn), vinden wij voor z_3 een hoek van iets meer dan 68° .

Opgemerkt wordt, dat de oplossing van het bovengestelde vraagstuk door gewone berekening, zeer lastig zou zijn.

Type II: De derde schaal is een snijdende rechte schaal.

§ 57. Stel in (I) $f_3 = 0$, dan is ook $q = 0$ en is $[z_3]$ dus een rechte schaal op O_1O_2 , met haar oorsprong O_3 samenvallend met O_1 . Deze gemeenschappelijke oorsprong zullen wij daarom aanduiden met O_{13} (figuur 25).

De **functievergelijking** voor dit nomogramtype, waarbij de derde schaal recht is en de beide assen van het schalenstel snijdt, is dus

$$\boxed{f_1 g_3 + f_2 = 0} \quad (II)$$

§ 58. De **constructieformules** zijn:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] \quad y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] \quad p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_2 g_3 + \mu_1} \end{array} \right\} \quad (23)$$

§ 59. **Constructie van $[z_3]$ door projectie.**

De deelpunten $[z_3]$ kunnen ook verkregen worden door projectie, b.v.:

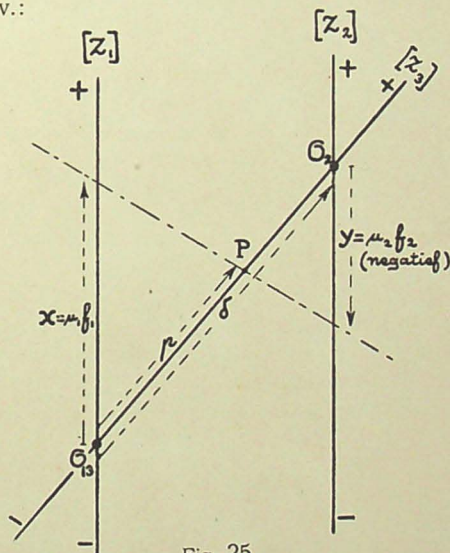


Fig. 25.

10. van uit een punt T' , gelegen op de as $[z_1]$, op een afstand K van O_1 , naar een schaal $v = -\frac{\mu_2}{\mu_1} K g_3$ op de as $[z_2]$ figuur 26b.
20. van uit een punt T'' , gelegen op de as $[z_2]$, op een afstand K van O_2 , naar een schaal $u = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{K}{g_3}$ op de as $[z_1]$ figuur 26a.

Hierin is K wederom een naar verkiezing (ook negatief) aan te nemen afstand.

Opmerkingen:

10. $[z_3]$ wordt regelmatig wanneer $g_3 = \frac{a + mz_3}{b - z_3}$, waarin a en b willekeurige getallen zijn en $m = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.
20. De gegeven vergelijking van type II kan desgewenscht tot

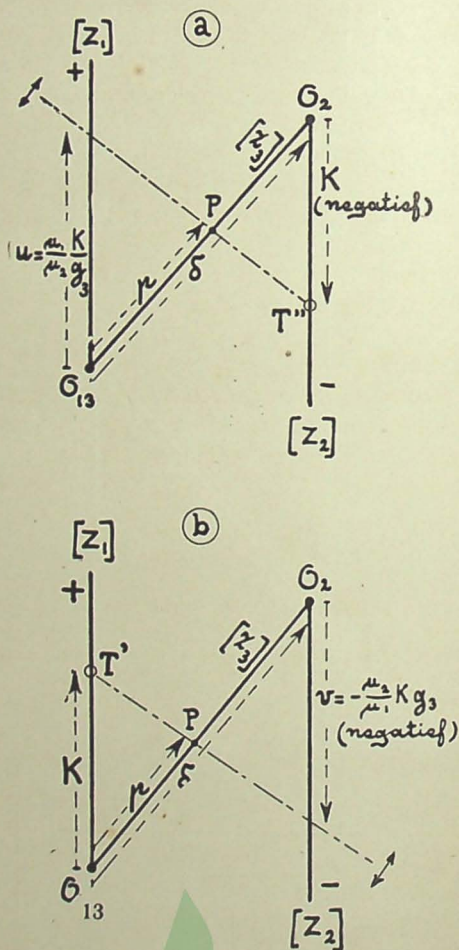


Fig. 26.

een nieuwe vergelijking van dat type vervormd worden, als

$$f_1^n g_3^n + \{ -(-f_2)^n \} = 0 \quad (24)$$

, waarin n een exponent van willekeurige grootte kan zijn (zie het voorbeeld in § 135).

§ 60. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

De berekening van de moduli heeft plaats als bij type I. Ook moet weer bij voorkeur $[z_3]$ tusschen de beide andere schalen gelegen zijn. Daartoe is noodig, dat een der functies f_1 of f_2 positief, de andere negatief is over het geheele of het grootste deel van het bereik.

Om aan deze voorwaarde te voldoen, kan (II) zoo noodig geschreven worden in een der vormen

$$\text{of} \quad \left. \begin{aligned} (-f_1) \cdot (-g_3) + f_2 &= 0 \\ f_1 \cdot (-g_3) + (-f_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

, wat overeenkomt met het omkeeren van de schaal $[z_1]$ of van $[z_2]$.

Is B de afstand, in c.m. gemeten, van de twee evenwijdige schalen, dan wordt dus δ bepaald uit

$$\delta \approx \sqrt{B^2 + L^2} \quad (26)$$

§ 61. Voorbeeld. Samengestelde interest (figuur 27).

Wanneer een kapitaal gedurende n jaren tegen p % rente op rente uitstaat, dan zal elke 100 gulden van dat kapitaal aangroeien tot een bedrag van

$$K = 100 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

gulden.

De gegeven vergelijking is te herleiden tot

$$\left[\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)\right] \cdot n + (2 - \log K) = 0$$

van het type II.

De aangenomen grenzen der veranderlijken zijn

	α	ω
voor $f_1 \dots \dots \log \left(1 + \frac{p}{100}\right)$	0	7
„ $f_2 \dots \dots 2 - \log K$	2000	100
„ $g_3 \dots \dots n$	1	100

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 27 werd aangenomen $L \approx 32$, $B = 20$. Dus was:

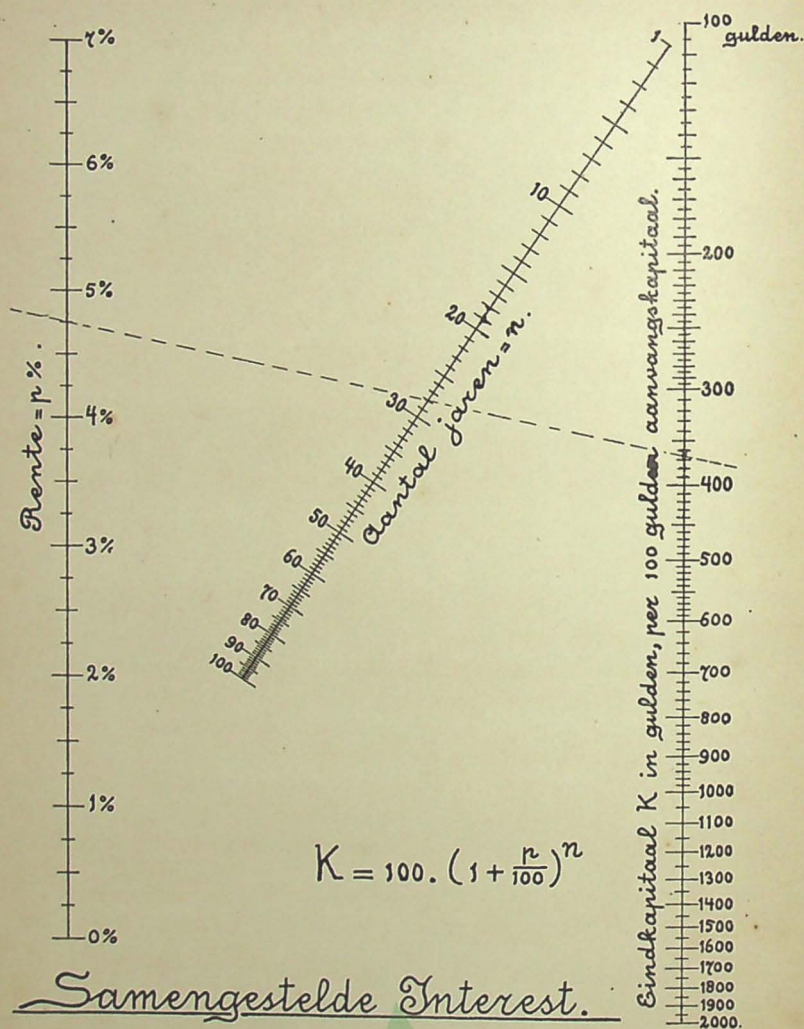


Fig. 27.

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= 0,029384 \\ f_1(a) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(\omega) &= 0 \\ f_2(a) &= -1,30103 \end{aligned}$$

$$k_1 = 0,029384$$

$$k_2 = 1,30103$$

$$\mu_1 \approx \frac{32}{0,029384}$$

$$\mu_2 \approx \frac{32}{1,30103}$$

aangenomen $\mu_1 = 1000$

aangenomen $\mu_2 = 25$

f_1 is positief, f_2 negatief over haar geheele bereik, dus komt $[z_3]$ tusschen $[z_1, z_2]$.

$$\delta \approx \sqrt{32^2 + 20^2} = 37,7 \dots$$

, aangenomen $\delta = 36$.

De constructieformules waren dus:

$$\begin{aligned} \text{voor } [z_1] \quad x &= 1000 \log \left(1 + \frac{p}{100} \right) \\ \text{„ } [z_2] \quad y &= 50 - 25 \log K \\ \text{„ } [z_3] \quad p &= \frac{36000}{25n + 1000} \end{aligned}$$

$[z_3]$ werd gemakkelijker door projectie verkregen, b.v. van een schaal $v = -0,4 n$ op de as $[z_2]$, van uit een punt op $[z_1]$, op een afstand $K = 16$ van O_1 .

Voor kleine waarden van n , b.v. < 10 , waarvoor de snijding der projecteerende lijnen met $[z_3]$ te scherp zou zijn geweest, werd de ligging der deelpunten uit de formule bepaald.

Toepassing van het nomogram:

Wanneer een kapitaal van f 20.000 gedurende 28 jaren tegen $4\frac{3}{4}\%$ rente op rente uitstaat, dan is (zie stippellijn) elke honderd gulden van dat kapitaal aangegroeid tot ongeveer f 366,5, het geheele kapitaal dus tot ongeveer f 73.300.

Type III: De derde schaal is een evenwijdige rechte schaal.

§ 62. Stel in (I) $g_3 = 1$, dan is $p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_1 + \mu_2}$ en dus constant.

$[z_3]$ is dus recht en evenwijdig met de beide andere schalen. De ligging ten opzichte van het schalenstel is bepaald door de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ (figuur 28). Want

$$\frac{p}{\delta - p} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{27}$$

De **functievergelijking** voor dit nomogramtype met drie evenwijdige schalen, is

$$f_1 + f_2 = f_3$$

(III)

§ 63. De **constructieformules** zijn:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] \quad y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] \quad p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_1 + \mu_2} \quad q = \mu_3 f_3 \end{array} \right\} \quad (28)$$

waarbij $\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ of $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3}$ (29)

De betrekking (29) is in figuur 29 voorgesteld door een schaal-

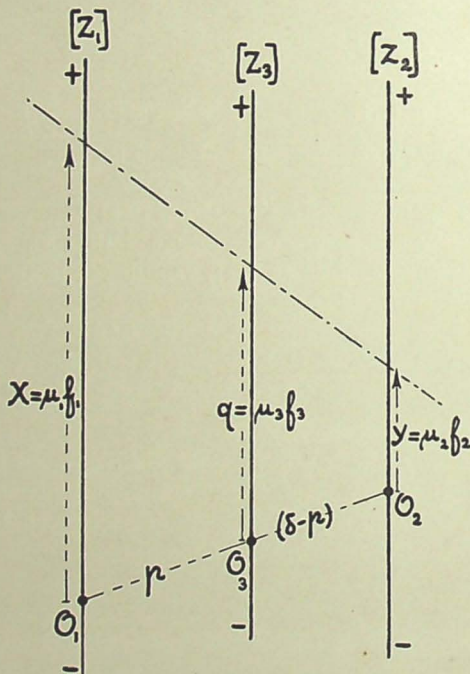


Fig. 28.

nomogram van het nog te behandelen type VI. Het gebruik van dit nomogram maakt de keuze van geschikte moduli voor de drie evenwijdige schalen gemakkelijker, te meer, omdat de stukken van de afleeslijn zich verhouden als de onderlinge afstanden van de schalen, van het met de betreffende moduli te construeeren nomogram.

§ 64. Het uit = en : samengestelde, in een cirkel geplaatste

Moduli
voor het nomogram
met drie evenwijdige
schalen.

$$\mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

of

$$\frac{1}{\mu_3} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

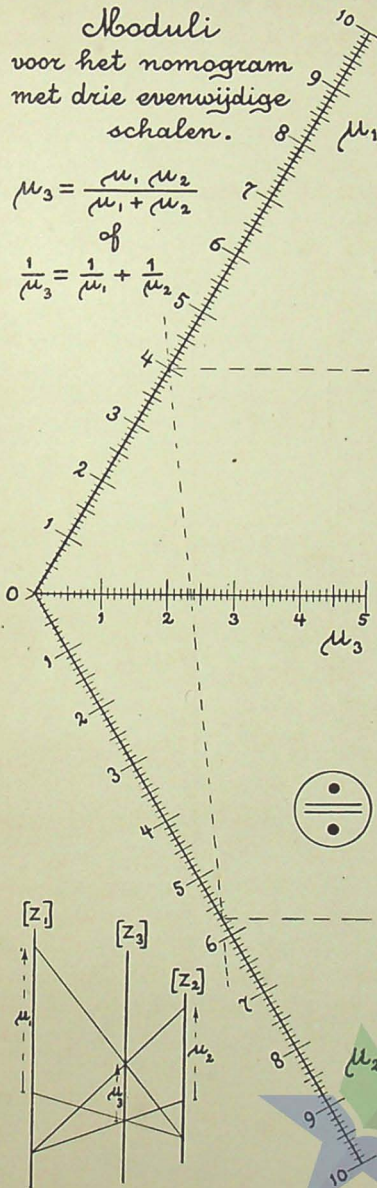


Fig. 29.

teeken (evenredigheidsteeken), beduidt, dat de voorgestelde betrekking geldig blijft voor evenredig ver-grootte of verkleinde waarden der veranderlijken. Als dus bij de waarden $z_1 = \eta_1$ en $z_2 = \eta_2$ een waarde $z_3 = \eta_3$ behoort, dan heeft voor $z_1 = k\eta_1$ en $z_2 = k\eta_2$ de derde veranderlijke een waarde $z_3 = k\eta_3$.

De schalen van een nomogram voor zulk een betrekking, kunnen dus desgewenscht voor een kleiner bereik worden geteekend, dan anders noodig zou zijn. Hun nauwkeurigheid kan dan grooter wezen. Een voorbeeld van de toepassing van de genoemde eigenschap is door de gestippelde afleeslijn aangeduid, deze afleeslijn geldt voor de moduli van de in § 66 behandelde betrekking.

§ 65. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Tusschen de lengten van de drie schalen, — en dit geldt voor alle schaalnomogrammen —, bestaat het in figuur 30 uitgedrukte verband. De middelste schaal moet het gedeelte AB geheel omvatten, doch mag niet uitsteken buiten CD, daar er anders nuttelooze gedeelten aan het nomogram zouden voorkomen. Kleine uitste-

kende gedeelten ter verkrijging van een beter overzicht, — b.v. door een schaal niet bij $z = 97$, maar bij $z = 100$ te laten eindigen —, mogen wél voorkomen.

Er moet dus worden nagegaan of de grenzen der veranderlijken aan den genoemden eisch voldoen.

De aflezing van het nomogram is het gemakkelijkst en nauwkeurigst, wanneer de schaal voor de afhankelijk veranderlijke (de gezochte) tusschen de schalen voor de beide andere (de gegeven veranderlijken) geplaatst is. Anderzijds wordt het beschikbare teekenvlak het best benut, wanneer de schaal voor de grootste functielengte tusschen de beide andere wordt geteekend.

Is er veel verschil tusschen de drie functielengten dan volgen wij steeds den laatsten regel, is er slechts weinig verschil, dan den eersten.

De moduli μ_1 en μ_2 worden weer berekend uit

$$\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} \quad \text{en} \quad \mu_2 \approx \frac{L}{k_2}$$

, waarin dus meestal k_1 en k_2 de twee kleinste functielengten zullen moeten wezen.

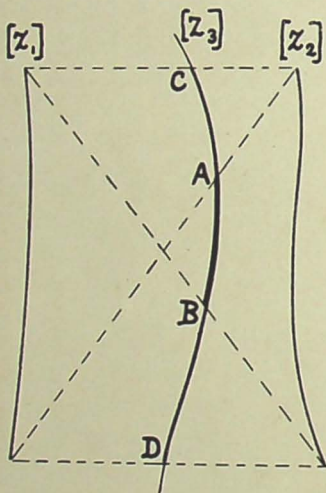


Fig. 30.

Is evenwel $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ of $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ ongeveer 3 of grooter, waardoor de middenschaal te dicht op een der buitenste zou zijn gelegen, terwijl de andere buitenste schaal, — in verhouding tot de belangrijkheid van haar veranderlijke —, gevoelig zeer verkort zou mogen wezen, dan is er wellicht reden om den modulus van deze laatste schaal twee- of meermalen kleiner te nemen, waardoor de onderlinge ligging der schalen wordt verbeterd.

§ 66. Voorbeeld. Stroomsnelheid in kanalen (figuur 31).

FORCHHEIMER heeft voor de betrekking tusschen de gemiddelde stroomsnelheid v , het verhang J en de gemiddelde straal R 1) in

1) Het verhang is de daling van den waterspiegel in c.m. over 1 k.m. kanaallengte; de gemiddelde straal is het quotient van het natte profiel en den z.g. natten omtrek van de kanaaldorsnede (zie de toelichtende schets in figuur 31).

Stroomsnelheid in kanalen met eenigszins begroeiide oeveren wanden, volgens de formule van Forchheimer

$$V = 0,13 R^{0,7} J^{0,5}$$

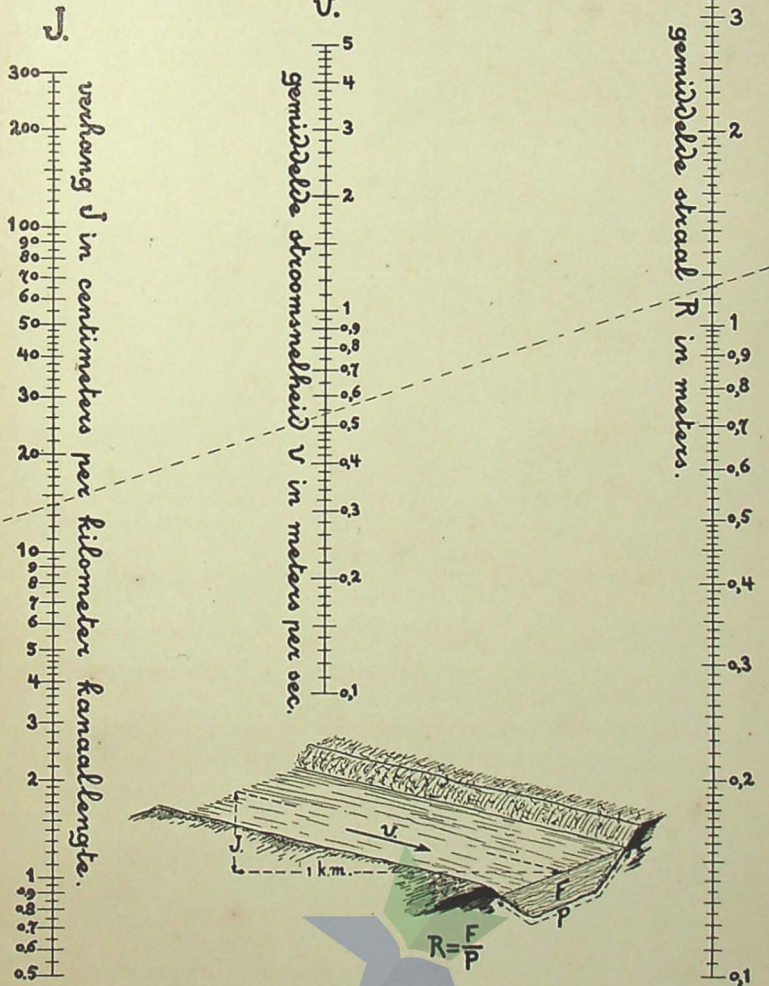


Fig 31.

kanalen met eenigszins begroeide aarden wanden de formule afgeleid

$$\nu = 0,13 R^{0,7} J^{0,5}$$

De gegeven vergelijking kan worden herleid tot

$$0,5 \log J + (0,7 \log R + \log 0,13) = \log \nu$$

van het type III.

De aangenomen grenzen der veranderlijken zijn:

	α	ω
voor f_1 $0,5 \log J$	0,5	300
„ f_2 $0,7 \log R + \log 0,13$	0,1	4
„ f_3 $\log \nu$	0,1	5

Voor de oorspronkelijke tekening van figuur 31 werd aangenomen $L \approx 30$, $B = 20$.

Wij gaan nu eerst na of $[\nu]$ middenschaal mag worden. De functielengten zijn:

voor J $0,5 (\log 300 - \log 0,5) = 1,38953$

„ R $0,7 (\log 4 - \log 0,1) = 1,12144$

„ ν $\log 5 - \log 0,1 = 1,69897$

$[\nu]$ kan dus middenschaal wezen. Dus was verder:

$\mu_1 \approx \frac{30}{1,38953}$ <p>dus $M_1 = 0,5 \mu_1 \approx \frac{15}{1,38953}$</p> <p>aangenomen $M_1 = 10$</p> <p>dus $\mu_1 = 20$</p>	$\mu_2 \approx \frac{30}{1,12144}$ <p>dus $M_2 = 0,7 \mu_2 \approx \frac{21}{1,12144}$</p> <p>aangenomen $M_2 = 20$</p> <p>dus $\mu_2 = \frac{200}{7} = 28,57 \dots$</p>
--	---

In het nomogram figuur 29 zijn de waarden $\frac{\mu_1}{5} = 4$ en $\frac{\mu_2}{5} = 5,714$ door een afleeslijn verbonden. Daaruit blijkt in de eerste plaats $\frac{\mu_3}{5} \approx 2,35$, en in de tweede plaats zien wij daaruit hoe de ligging der drie schalen wezen zal.

Door berekening vinden wij $\mu_3 = \frac{200}{17} = 11,765$.

De verhouding van de afstanden van $[z_3]$ tot $[z_1]$ en $[z_2]$ is als $\mu_1 : \mu_2$ dus als 7 : 10.

De constructieformules voor de schalen waren dus:

voor $[z_1]$ $x = 10 \log J$

„ $[z_2]$ $y = 20 \log R - 25,316$

„ $[z_3]$ $q = 11,765 \log \nu$

$[z_1]$ en $[z_2]$ werden met behulp van voorhanden schaalverdelingen met logarithmische schaaleneheden $M_1 = 10$ en $M_2 = 20$ geteekend.

Daar $x = 0$ voor $J = 1$
 en $y = 0$ voor $R = 18,44$

, zijn de genoemde schaalpunten de oorsprongen van de beide schalen en is hun verbindingslijn de oorspronglijn.

De oorsprong van $[z_3]$ is het schaalpunt $v = 1$, dit schaalpunt komt dus dáár te liggen, waar de drager $[z_3]$ door de oorspronglijn gesneden wordt.

$[z_3]$ kan nu verder geteekend worden met behulp van de logaritmische harp, wanneer wij daarvan een schaaleenheid van 11,765 cm, overnemen.

$[z_3]$ is eveneens door projectie van $[z_2]$ te construeeren. Hiertoe herleiden wij de gegeven vergelijking tot

$$J = \frac{v^2}{0,0169 R^{1,4}}$$

en berekenen daaruit:

voor $v = 1$ en $R = 1$ is $J = 59,17$

voor $v = 0,1$ en $R = 1$ is $J = 0,5917$.

De juiste plaats van deze schaalpunten J wordt desgewenscht nog berekend en door het trekken van de verbindingslijnen de plaats van $v = 0,1$ en $v = 1$ op den drager $[z_3]$ bepaald. Nu trekken wij nog de lijn $R = 0,1$, $v = 0,1$ en bepalen het snijpunt daarvan met de reeds getrokken lijn $R = 1$, $v = 1$. Uit dit punt als toppunt, kan $[z_3]$ door projectie van $[z_2]$ verkregen worden.

Toepassing van het nomogram.

De gemiddelde straal van een kanaalprofiel is 1,15 m. Deze is berekend uit de afmetingen van dat profiel, n.l. een bodembreedte van 4,93 m., taluds 2 : 1 en een waterdiepte van 1,64 m., waaruit volgt dat $F = 14,13 m^2$ en $P = 12,28 m.$, dus R gelijk aan het quotient dier beide waarden.

Het verhang op dat kanaal is 14 cm. per km. kanaallengte.

Uit het nomogram lezen wij af (stippellijn), dat de gemiddelde stroomsnelheid volgens Forchheimer, dan ongeveer 0,54 m/sec. zal bedragen.



Stelsel betrekkingen van type III met twee gemeenschappelijke veranderlijken. Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen.

§ 67. Afleiding van de constructieformules.

Het komt meermalen voor dat een aantal betrekkingen

$$\left. \begin{aligned} a_1 f_1 + a_2 f_2 &= f_3 \\ b_1 f_1 + b_2 f_2 &= f_4 \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 &= f_5 \\ &\text{enz.} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

, welke dus allen twee der veranderlijken gemeen hebben, gezamenlijk optreden.

In dat geval teekenen wij een schalenstel $[z_1, z_2]$ met

$$x = \mu_1 f_1 \quad \text{en} \quad y = \mu_2 f_2$$

, en stellen daarop achtereenvolgens de betrekkingen (30) voor, n.l. door het teekenen van de schalen $[z_3], [z_4], [z_5], \text{enz.}$

Het stelsel (30) heeft n vergelijkingen met $n + 2$ veranderlijken. Is dus de waarde van 2 veranderlijken gegeven, dan kan die der overige worden bepaald. Met het nomogram geschiedt dit door een rechte afleeslijn te leggen door de 2 gegeven schaalpunten en op de overige schalen, bij de betreffende snijpunten, de waarden af te lezen.

Voor elk der vergelijkingen (30) zijn de eigenlijke moduli voor $[z_1]$ en $[z_2]$ verschillend; voor de eerste zijn ze onderscheidenlijk $\frac{\mu_1}{a_1}$ en $\frac{\mu_2}{a_2}$, voor de tweede $\frac{\mu_1}{b_1}$ en $\frac{\mu_2}{b_2}$, enz.

Stellen wij weer den afstand $O_1 O_2 = \delta$ en de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$, dan is voor $[z_3]$

$$p = \frac{\frac{\mu_1}{a_1} \delta}{\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2}} = \frac{m a_2 \delta}{a_1 + m a_2} \quad (31)$$

en $q = \mu_3 f_3$, waarin

$$\mu_3 = \frac{\frac{\mu_1}{a_1} \cdot \frac{\mu_2}{a_2}}{\frac{\mu_1}{a_1} + \frac{\mu_2}{a_2}} = \frac{\mu_1}{a_1 + m a_2} \quad (32)$$

De constructieformules zijn dus:

voor $[z_1]$	$x = \mu_1 f_1$	}	(33)	
„ $[z_2]$	$y = \mu_2 f_2$			
„ $[z_3]$	$p = \frac{ma_2 \delta}{a_1 + ma_2}$			$q = \frac{\mu_1}{a_1 + ma_2} f_3$
„ $[z_4]$	$p = \frac{mb_2 \delta}{b_1 + mb_2}$			$q = \frac{\mu_1}{b_1 + mb_2} f_4$

enz.

§ 68. Grafische bepaling van m.

De onderlinge ligging van de schalen wordt dus beheerscht door de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$. Welke waarde daarvoor het meest geschikt is, kan grafisch worden vastgesteld.

Hiertoe wordt, bij voorbeeld op millimeterpapier, een assenstelsel geteekend (figuur 32) en uit den oorsprong daarvan voor elk der

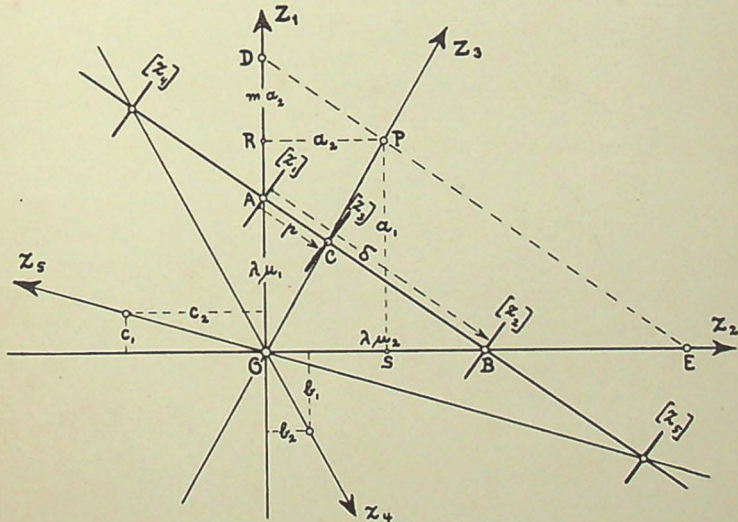


Fig. 32.

veranderlijken een straal getrokken, door een punt, dat de coëfficiënten van f_1 en f_2 in (30) tot coördinaten heeft, waarbij a_1 , b_1 , enz. in *verticale* en a_2 , b_2 , enz. in *horizontale* richting worden uitgezet. De veranderlijken z_1 en z_2 zijn onderscheidenlijk aan de in die richtingen getrokken assen toegevoegd. Voor elke straal is de richting naar het gecoördineerde punt de positieve richting (aangeduid door de pijlpunt).

Een over dit stralenstelsel getrokken transversaal wordt gesneden in een reeks punten, wier onderlinge ligging overeenkomt met de ligging van de schalen van het nomogram, wanneer daarvoor een verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$ wordt aangenomen, welke gelijk is aan de verhouding van de door de transversaal van de verticale en horizontale as afgesneden stukken.

Bewijs: In figuur 32 is door het punt P, met coördinaten a_2 en a_1 , de lijn DE // de transversaal getrokken. Nu is:

$$\frac{p}{\delta} = \frac{AC}{AB} = \frac{DP}{DE} = \frac{DR}{DO} = \frac{ma_2}{a_1 + ma_2}$$

$$\text{dus } p = \frac{ma_2\delta}{a_1 + ma_2}.$$

$$\text{Voorts is } \frac{OC}{OP} = \frac{OA}{OD} = \frac{\lambda\mu_1}{a_1 + ma_2} = \lambda\mu_3$$

De ligging van de transversaal moet zoo gekozen worden, dat

10. de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$ *positief* is, wanneer het normaal is, dat bij grooter wordende f_1 ook f_2 grooter wordt, en *negatief*, wanneer met het aangroeien van f_1 gewoonlijk een afnemen van f_2 gepaard gaat.

Wanneer aan dezen eisch voldaan is, zal de afleeslijn in 't algemeen niet te scherpe hoeken maken met de schalen en zullen laatstgenoemde niet te veel in lengte verschillen (zie figuur 33).

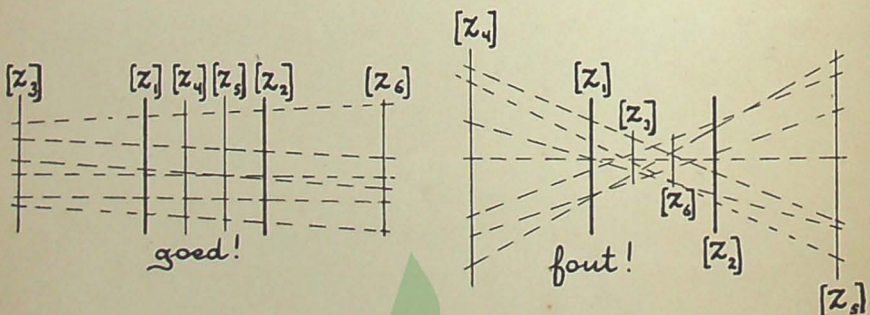


Fig. 33.

20. de snijpunten met de stralen zoo gelijkmatig mogelijk over de transversaal verdeeld zijn. Hierdoor wordt vermeden dat in het nomogram 2 of meer schalen te dicht op elkander komen.

§ 69. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

Is aldus een waarde voor m gekozen, dan wordt een voorloopige schets gemaakt van de ligging der schalen en hunne eindpunten. Uit deze schets leiden wij dan af, of de oorspronglijn meer of minder scheef ten opzichte van de schalen moet worden genomen. Daarna wordt de juiste plaats der schalen berekend en vervolgens schaal voor schaal met behulp van de formules of door projectie geconstrueerd.

§ 70. Voorbeeld. Berekening van cilindrische schroefveeren (figuur 34).

Bij gehard veerenstaal mag de toe te laten schuifspanning T op 40 kg. per mm.² en de glijdingsmodulus G op 8000 kg. per mm.² gesteld worden.

Is nu:

P = de maximum draagkracht in kg.,

f = de door belasting met P veroorzaakte verlenging of verkorting in mm.,

A = de bij belasting met P door de veer opgenomen arbeid in kgm.,

n = het aantal windingen van de veer en voorts:

d = de draaddikte in mm.,

D = de veerdiameter in mm.,

dan is:

$$P = \frac{\pi}{8} T \frac{d^3}{D} = 5\pi d^3 D^{-1}$$

$$\frac{f}{n} = 8 \frac{P}{G} \frac{D^3}{d^4} = 0,005\pi d^{-1} D^2$$

$$\frac{f}{nP} = \frac{8}{G} \frac{D^3}{d^4} = 0,001 d^{-4} D^3$$

en
$$\frac{A}{n} = 0,0005 P \frac{f}{n} = 0,0000125 \pi^2 d^2 D.$$

Dit viertal betrekkingen kan geschreven worden als een stel vergelijkingen (30) met $z_1 = d$ en $z_2 = D$. In het algemeen zal d toenemen als D grooter wordt en omgekeerd.

Het stel vergelijkingen geschreven volgens (30) is dan:

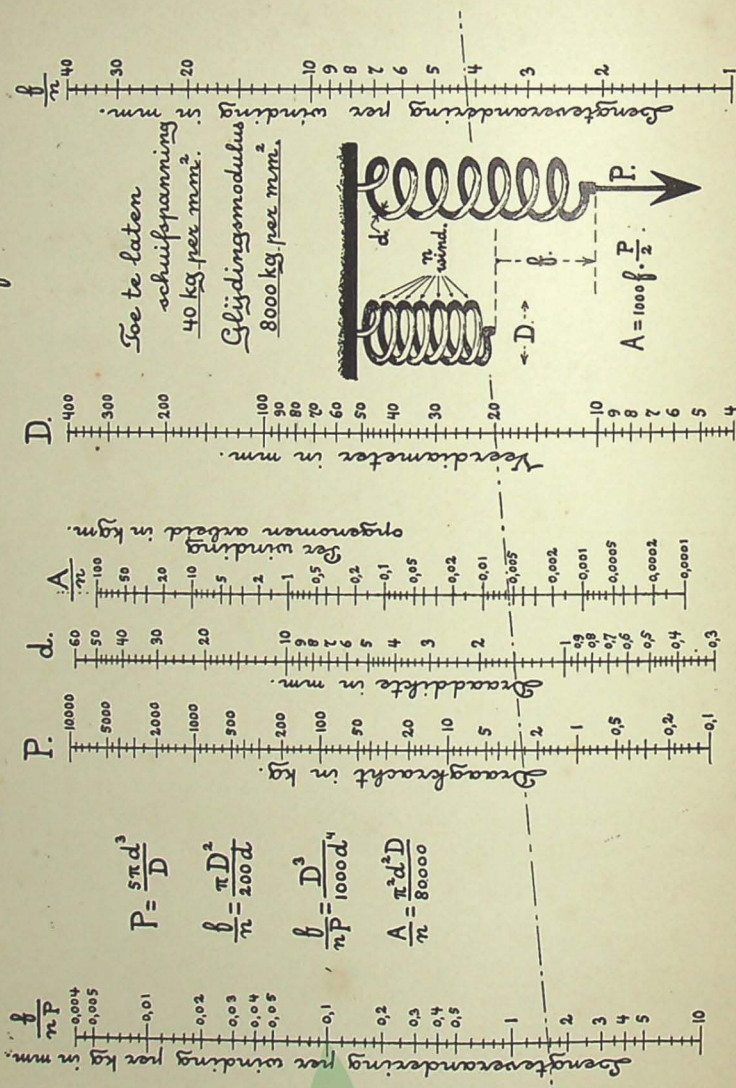
$$(+3) \log d + (-1) \log D = \log P - \log 5\pi$$

$$(-1) \log d + (+2) \log D = \log \frac{f}{n} - \log 0,005 \pi$$

$$(-4) \log d + (+3) \log D = \log \frac{f}{nP} + \log 1000$$

$$(+2) \log d + (+1) \log D = \log \frac{A}{n} - \log 0,0000125 \pi^2.$$

Berekening van cilindrische schroefveeren.



$$P = \frac{\pi d^3}{80000} \cdot \frac{P}{2}$$

$$\frac{f}{\pi} = \frac{\pi D^2}{2000 d}$$

$$\frac{f}{\pi P} = \frac{D^3}{10000 d^4}$$

$$A = \frac{\pi^2 d^2 D}{80000}$$

Fig. 34.

In figuur 35 is het stralenstelsel voor deze betrekkingen geteekend. De straal voor P b.v. gaat door het punt met de coördinaten $a_1 = +3$ en $a_2 = -1$, naar boven en zijwaarts uitgezet.

Daar d met D toe- of afneemt, moet de transversaal hunne stralen beiden in de positieve of negatieve gedeelten snijden. De geteekende ligging van de transversaal is dan ongeveer

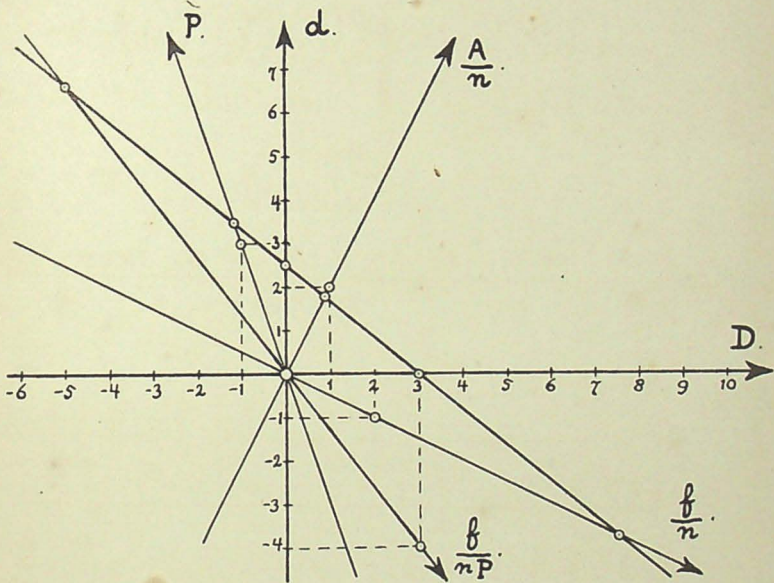


Fig. 35.

het geschiktst. Voor deze onderlinge ligging der schalen is het nomogram (figuur 34) geteekend.

Uit figuur 35 volgt $m = \frac{5}{6}$.

Voor de oorspronkelijke tekening van figuur 34 werd $\delta = 7$, $\mu_2 = 10$ en dus $\mu_1 = 8,333$ gekozen.

Dus was volgens de formules (31) en (32):

- voor $[P]$ $p = -2,692$ $\mu_3 = +3,846$
- „ $[\frac{b}{n}]$ $p = +17,5$ $\mu_4 = +12,5$
- „ $[\frac{f}{nP}]$ $p = -11,667$ $\mu_5 = -5,556$
- „ $[\frac{A}{n}]$ $p = +2,059$ $\mu_6 = +2,941$

De verdere constructie van deze schalen werd verricht met behulp van rechtstreeks uit de gegeven betrekkingen volgende alignementen. Zoo is

$$\begin{array}{llll} \text{voor } d = 1 & \text{en } D = 5\pi & \dots & P = 1 \\ \text{„ } d = 5\pi & \text{„ } D = 100 & \dots & \frac{f}{n} = 10 \\ \text{„ } d = 1 & \text{„ } D = 10 & \dots & \frac{f}{nP} = 1 \\ \text{„ } d = 10 & \text{„ } D = \frac{800}{\pi^2} & \dots & \frac{A}{n} = 1 \end{array}$$

Toepassing van het nomogram.

Met welk gewicht mag men een veer van 7 windingen, met een diameter van 20 mm. en een draaddikte van 1,5 mm. belasten? Hoe groot is de uitrekking van die veer en welke arbeid wordt door haar opgenomen?

Door aflezing uit het nomogram vinden wij (stippellijn), dat de draagkracht 2,6 kg. is, de verlenging per winding 4,2 mm., dus totaal 29,4 mm. bedraagt en de opgenomen arbeid $7 \times 0,0056 = = 0,039$ kgm. zal wezen. De lengteverandering per winding per kg. is iets minder dan 1,6 mm.

Type Ia. De derde schaal ligt op een cirkelboog.

§ 71. Afleiding van de constructieformules.

Heeft $[z_3]$ niet een willekeurige kromme, maar een *cirkelboog* tot drager, dan bespaart dat, bij het teekenen van deze schaal, ongeveer de helft van den benoodigden tijd, wanneer wij tenminste de plaats van het middelpunt en den straal van den boog kennen.

Voor het geval er tusschen f_3 en g_3 een betrekking is van den 2en graad, is het dikwijls mogelijk een geschikt nomogram met cirkelboogvormigen $[z_3]$ af te leiden. Wij zullen dat hieronder aantoonen.

Stel dat er in (I) tusschen f_3 en g_3 de algemeene betrekking van den 2en graad is:

$$a_0 f_3^2 + a_1 f_3 g_3 + a_2 g_3^2 + a_3 f_3 + a_4 g_3 + a_5 = 0 \quad (34)$$

, waarin a_0, a_1, \dots willekeurige coëfficiënten zijn.

Substitueer in (34) de uitdrukkingen voor f_3 en g_3 uit (19). Stel daarbij bovendien

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = m \text{ en } \frac{\delta}{\mu_2} = n \tag{35}$$

, dan verkrijgen wij de 2e graads-vergelijking in p en q :

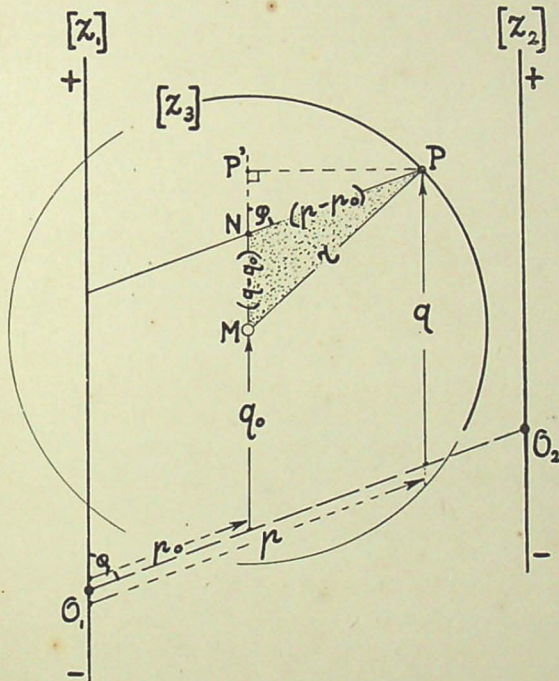


Fig. 36.

$$\left. \begin{aligned} (a_2 m^2 - a_4 m + a_5) p^2 + (a_3 n - a_1 n m) p q + (a_0 n^2) q^2 + \\ + (a_4 m \delta - 2 a_2 m^2 \delta) p + (a_1 n m \delta) q + a_2 m^2 \delta^2 = 0 \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

De drager $[z_3]$ is dus een kegelsnede.

Voor een cirkel (zie figuur 36), waarvoor de coördinaten van het middelpunt p_0 en q_0 zijn en de straal r is, is de vergelijking op scheefhoekige assen (cosinusregel in $\triangle MNP$):

$$r^2 = (p - p_0)^2 + (q - q_0)^2 + 2(p - p_0)(q - q_0) \cos \varphi \tag{37}$$

of:

$$\left. \begin{aligned} p^2 + 2 \cos \varphi \cdot p q + q^2 - 2(p_0 + q_0 \cos \varphi) p - \\ - 2(p_0 \cos \varphi + q_0) q + (p_0^2 + q_0^2 + 2 p_0 q_0 \cos \varphi - r^2) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{38}$$

Wij vermenigvuldigen nu de coëfficiënten van (38) met een willekeurigen factor λ en stellen ze dan gelijk aan die van (36).

Uit de zes betrekkingen, welke op die wijze verkregen worden, kunnen wij, nadat voor m of n een waarde is aangenomen, achter-eenvolgens de andere waarden, welke de ligging van den cirkelvormigen drager $[z_3]$ bepalen, berekenen.

Wij kunnen daarvoor de volgende formules afleiden:

$$\left. \begin{aligned} a_0 n^2 &= a_2 m^2 - a_4 m + a_5 \\ \cos \varphi &= \frac{a_3 - a_1 m}{2 a_0 n} \\ \frac{p_0}{\mu_2} &= \frac{m}{2 a_0 n \sin^2 \varphi} (a_1 n \cos \varphi + 2 a_2 m - a_4) \\ \frac{q_0}{\mu_2} &= \frac{m}{2 a_0 n \sin^2 \varphi} (-a_1 n - 2 a_2 m \cos \varphi + a_4 \cos \varphi) \\ \left(\frac{r}{\mu_2}\right)^2 &= \left(\frac{p_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{\mu_2}\right)^2 + 2 \frac{p_0}{\mu_2} \cdot \frac{q_0}{\mu_2} \cdot \cos \varphi - \frac{a_2 m^2}{a_0} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Het zal duidelijk zijn, dat niet elke waarde van m of n aan dit stel formules zal kunnen voldoen.

Op de beschreven wijze wordt dus o.a. de onderlinge ligging van $[z_1]$ en $[z_2]$ bepaald; behalve de bovenstaande formules gelden verder de bekende formules voor type I.

§ 72. Voorbeeld. Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduw-lengte (figuur 37).

De voor te stellen betrekking is

$$\sin h = \sin 52^\circ \cdot \sin d + \cos 52^\circ \cdot \cos d \cdot \cos t.$$

Hierin beduiden (zie toelichtende schets in figuur 37)

- h de zonshoogte,
 d de declinatie van de zon,
 t de uurhoek van de zon.

De betrekking geldt voor een breedte van ongeveer 52° .

In het nomogram zijn in plaats van t en d , de met deze verbonden, meer praktisch van belang zijnde veranderlijken, „ware tijd” en „datum” voorgesteld.

Daar 15° van den uurhoek overeenkomt met 1 uur tijdsverschil, is de eerstgenoemde vervanging zeer eenvoudig, de tweede werd met behulp van een tabel uitgevoerd.

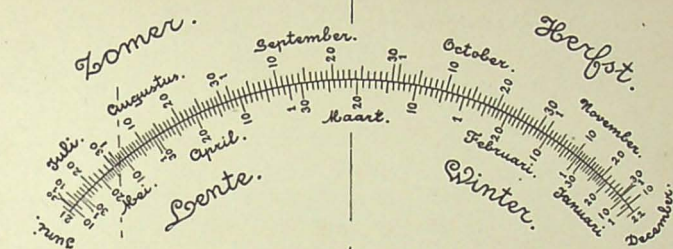
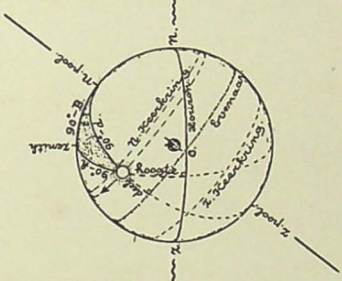
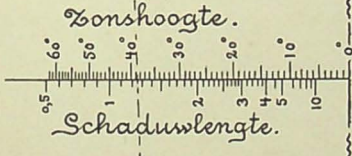
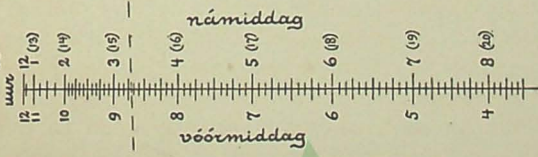
De gegeven betrekking wordt als (1) geschreven in den vorm

$$(\cotg 52^\circ \cos t) \cdot (-\cos d) + (\operatorname{cosec} 52^\circ \sin h) = \sin d.$$

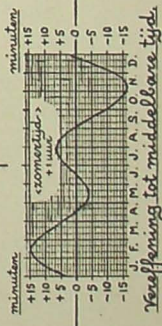
Dus is: $f_3 = \sin d$ $g_3 = -\cos d$.

Tijdsbepaling uit Zonshoogte of Schaduwlengte. 200

ware tijd.



Nomogram voor $\sin \phi = \sin \text{Breid.} + \cos \text{Breed.} \cos \theta$,
 in Amsterdamsche tijd voor $B = 52^\circ 48'$, $on' 146$.
 Correctie per graad meerdere W.B. = + 4 minuten.
 Door de refractie staat de zon aan den horizon
 schijnbaar ongeveer $\frac{1}{2}$ te hoog.
 De schijnbare zonnemiddellijn is ongeveer 1'.
 Met Schaduwlengte wordt bedoeld de horizon-
 tale schaduwlengte van 1 meter hoogte. 200



Vereffening tot middelbare tijd.



Fig. 37.

Bijgevolg, omdat

$$\sin^2 d + (-\cos d)^2 = \sin^2 d + \cos^2 d = 1$$

, is ook

$$f_3^2 + g_3^2 = 1$$

Er is dus tusschen f_3 en g_3 een betrekking (34) met

$$\begin{array}{ll} a_0 = 1 & a_3 = 0 \\ a_1 = 0 & a_4 = 0 \\ a_2 = 1 & a_5 = -1 \end{array}$$

Uit de formules (39) volgt na substitutie van deze waarden:

$$\cos \varphi = 0; \quad q_0 = 0; \quad n^2 = m^2 - 1;$$

$$\frac{p_0}{\mu_2} = \frac{m^2}{n}; \quad \frac{r}{\mu_2} = \frac{m}{n}.$$

In de laatste drie vergelijkingen komen vijf veranderlijken voor, waarvan wij er dus twee naar verkiezing mogen bepalen.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 37 werden gekozen:

$$\mu_1 = 10 \operatorname{tg} 52^\circ = 12,8; \quad \mu_2 = 11 \sin 52^\circ = 8,668$$

en dus zijn:

$$m = 1,477; \quad n = 1,087; \quad \delta = 9,41; \quad p_0 = 17,4; \quad r = 11,8.$$

De constructieformules voor de schalen waren dus:

$$\text{voor } [z_1] \quad x = 10 \cos t$$

$$\text{,, } [z_2] \quad y = 11 \sin h$$

$$\text{,, } [z_3] \quad p = \frac{9,41}{1 - 0,6772 \cos d} \quad q = \frac{8,668 \sin d}{1 - 0,6772 \cos d}$$

Voorts was de straal r van den cirkelboogvormigen $[z_3]$ gelijk aan 11,8 en waren de coördinaten van het middelpunt $p_0 = 17,4, q_0 = 0$.

Omtrent $[z_3]$ moet nog opgemerkt worden, dat de deelpunten het tijdstip van 12 uur overdag aanduiden.

Op $[z_2]$ is naast de zonshoogte de schaduw lengte aangegeven.

De schaal voor de zonshoogte werd geconstrueerd met de formule $y = 11 \sin h$. Duiden wij de schaduw lengte aan met S , dan bestaat er tuschen h en S de betrekking

$$S = \operatorname{cotg} h.$$

De dubbelschaal op $[z_2]$ kon dus, na de constructie van de schaal voor h , uit deze formule worden voltooid. Ook kon de schaal voor S direct worden geconstrueerd met de formule

$$y = \frac{11}{\sqrt{S^2 + 1}}$$

, welke formule uit de twee voorgaande is af te leiden.

Het nomogram geeft de *ware* tijd; om de *middelbare* tijd te verkrijgen moet een correctie worden aangebracht, welke wij, aan de onder $[z_1]$ geteekende kromme, kunnen aflezen.

Toepassing van het nomogram.

Wanneer op 12 Mei des voormiddags, in midden-Nederland, een vertikaal gestelde stok een schaduw werpt van 1,255 maal de lengte van dien stok, wanneer dus de zonshoogte $38^{\circ}40'$ is, dan is de ware tijd, zooals uit het nomogram is af te lezen (stippellijn), 8 uur 42 min., de vereffening op dien datum is — 4 minuten, dus is de middelbare (Amsterdamsche) tijd 8 uur 38 min.

Met behulp van dit nomogram kan dus, als de zon schijnt, zonder uurwerk bepaald worden hoe laat het is.



HOOFDSTUK 13.

Nomogrammen op een snijdend schalenstel.

Type IV: De derde schaal is een kromme schaal.

Afleiding van de functievergelijking en de constructieformules.

§ 73. In figuur 38 zijn $[z_1]$ en $[z_2]$ functieschalen met gemeenschappelijke oorsprong O , en wel voor $x = \mu_1 f_1$ en $y = \mu_2 f_2$.

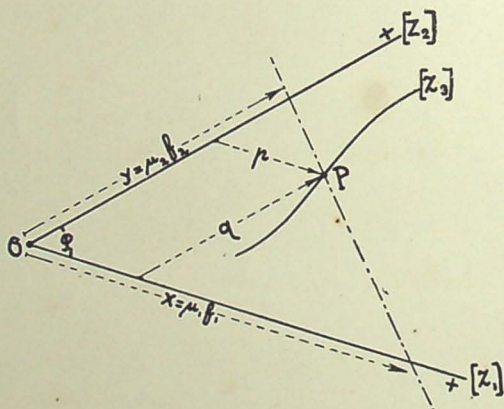


Fig. 38.

De plaats van een willekeurig punt P van het teekenvlak wordt bepaald door zijn cartesische coördinaten p en q .

Uit de figuur blijkt:

$$\frac{p}{x} = \frac{y - q}{y} = 1 - \frac{q}{y}$$

of

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{y} = \frac{1}{q}$$

Substitueer hierin $x = \mu_1 f_1$ en $y = \mu_2 f_2$,

dan is:

$$\frac{1}{f_1} \cdot \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{1}{q} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{q}$$

Stel
$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{q}{p} = g_3 \text{ en } \frac{q}{\mu_2} = f_3 \tag{40}$$

Door eliminatie van z_3 uit (40), wordt een betrekking tusschen p en q verkregen, namelijk de vergelijking van den drager $[z_3]$, Elke waarde van z_3 bepaalt daarop een schaalpunt.

De substitutie van (40) in de voorgaande vergelijking geeft dus als **functievergelijking** voor het algemeene geval dat de derde schaal een kromme is:

$$\boxed{\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}} \tag{IV}$$

§ 74. De **constructieformules** voor dit nomogramtype zijn :

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = \mu_1 f_1 \\ \text{,, } [z_2] \quad y = \mu_2 f_2 \\ \text{,, } [z_3] \quad p = \mu_1 \frac{f_3}{g_3} \quad q = \mu_2 f_3 \end{array} \right\} \tag{41}$$

, waarbij dus de formules voor $[z_3]$ uit (40) werden afgeleid.

Stel weer

$$g_3 = F(f_3), \text{ dus } = F\left(\frac{q}{\mu_2}\right),$$

dan is de **vergelijking van den drager $[z_3]$** :

$$p = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{q}{F\left(\frac{q}{\mu_2}\right)} \tag{42}$$

Is g_3 niet explicite in f_3 uit te drukken, dan kan de vergelijking van den drager met behulp van de formules (40) verkregen worden.

De grootte van den hoek φ tusschen $[z_1]$ en $[z_2]$ kan willekeurig worden gekozen.

§ 75. **Constructie van $[z_3]$ door projectie.**

Eenvoudiger dan door berekening met (41), kunnen de deelpunten $[z_3]$ dikwijls door projectie verkregen worden, bij voorbeeld uit O,

naar een schaal $u = \frac{\mu_1 K}{\mu_2} \cdot \frac{1}{g_3}$, op een drager evenwijdig aan $[z_1]$, met haar oorsprong O'' , gelegen op de as $[z_2]$, op een afstand K van O figuur 39a.

, of naar een schaal $v = \frac{\mu_2 K}{\mu_1} g_3$, op een drager evenwijdig aan $[z_2]$, met haar oorsprong O' , gelegen op de as $[z_1]$, op een afstand K van O figuur 39b.

Hierin is K wederom een naar verkiezing aan te nemen afstand.

§ 76. Verdere aanwijzingen voor de constructie.

De vorm van het nomogram kan eenigszins worden beheerscht door de keuze van de moduli μ_1 en μ_2 en van den hoek φ . Het snijdend schalenstel past zich echter in 't algemeen minder goed bij het beschikbare teekenvlak aan, dan het evenwijdige schalenstel. Het

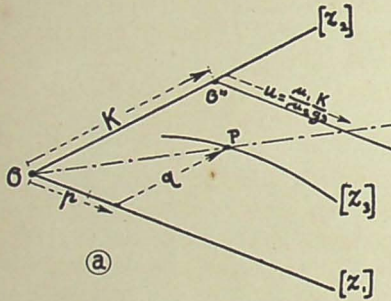


Fig. 39a.

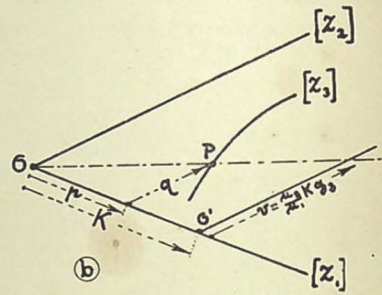


Fig. 39b.

is verder nadeelig, dat de volgorde der schalen door de betrekking zelve wordt bepaald en niet, als bij het evenwijdige schalenstel, vrij kan worden gekozen.

Ter verkrijging van een overzicht over het beloop der schalen, berekenen wij achtereenvolgens:

$$f_1(a_1) \text{ en } f_1(\omega_1)$$

$$f_2(a_2) \text{ ,, } f_2(\omega_2)$$

$$f_3(a_3) \text{ ,, } f_3(\omega_3)$$

en
$$\frac{f_3(a_3)}{g_3(a_3)} \text{ ,, } \frac{f_3(\omega_3)}{g_3(\omega_3)}$$

, en bepalen, onder een voorloopige aanname van

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \approx \frac{f_2(\omega_2)}{f_1(\omega_1)}$$

op een paar snijdende assen de ligging van de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ en der schaal-einden $[z_3]$ ¹⁾.

Wij behandelen nu twee gevallen:

1^o. $[z_3]$ ligt tusschen $[z_1]$ en $[z_2]$.

Bereken dan:

$$\frac{k_1}{f_1(\omega)} \text{ en } \frac{k_2}{f_2(\omega)} \tag{43}$$

¹⁾ Om de uiteenzetting niet te ingewikkeld te maken, wordt verondersteld, dat $f_1(a_1)$ en $f_1(\omega_1)$ beiden positief of beiden negatief zijn, evenzoo $f_2(a_2)$ en $f_2(\omega_2)$. In de practijk is dit bijna steeds zoo.

Verschillen deze waarden veel, dan wordt, wanneer dat met de belangrijkheid der beide veranderlijken z_1 en z_2 overeenkomt, de schaal van de veranderlijke waarvoor die waarde het kleinst is, ongeveer langs de diagonaal van het rechthoekige teekenvlak geplaatst. De modulus der andere schaal wordt daarna bepaald met

$$\mu \approx \frac{L}{k}$$

, waarna de plaats van den gemeenschappelijken oorsprong O globaal kan worden vastgesteld en de afstand D van dit punt tot het tegenovergestelde hoekpunt kan worden gemeten.

De modulus van de in déze richting te teekenen schaal volgt dan uit:

$$\mu \approx \frac{D}{f(\omega)} \quad (44)$$

, terwijl de grootte van den hoek φ reeds vast ligt.

Zijn de waarden (43) nagenoeg even groot, dan worden $[z_1]$ en $[z_2]$ ongeveer gelijk van lengte genomen en komt dus O in het midden van de korte zijde van het rechthoekige teekenvlak, terwijl μ_1 en μ_2 bepaald worden uit:

$$\mu_1 \approx \frac{D'}{f_1(\omega_1)} \text{ en } \mu_2 \approx \frac{D'}{f_2(\omega_2)} \quad (45)$$

, waarin D' de afstand is van O tot een der overgelegen hoekpunten.

Komt op die wijze $[z_3]$ te dicht bij een der andere schalen te liggen, dan is het noodig de berekende moduli eenigszins te wijzigen.

2^o. $[z_3]$ is buitenschaal.

Ligt $[z_3]$ als buitenschaal dicht bij een van de assen, dan kan de berekening van 1^o. gevolgd worden.

Is het algemeene beloop van $[z_3]$ ongeveer evenwijdig met de andere buitenschaal, dan kunnen deze schalen zoo geplaatst worden, dat hun hoofdrichting evenwijdig is met de lange zijden van het rechthoekig teekenvlak.

In het algemeen, zal steeds uit het gemaakte globale schetsje, de wijze van berekening der moduli kunnen blijken.

§ 77. Voorbeeld. *Vervanging van gewone, capacatieve en inductieve weerstanden, bij overgang van parallel- tot serieschakeling.* (figuur 40).

$$w_1 = w_2 \frac{w_3^2}{w_2^2 + w_3^2} \quad 1).$$

1) REIN-WIRTZ. *Radiotelegraphisches Praktikum*. 1922. blz. 69.

Zie, voor de beteekenis van deze formule, ook de tabel boven het nomogram en de toepassing aan het slot van dit voorbeeld.

Verwanging van gewone, capaciteve en inductieve weerstanden bij overgang van parallel- tot serieschakeling.

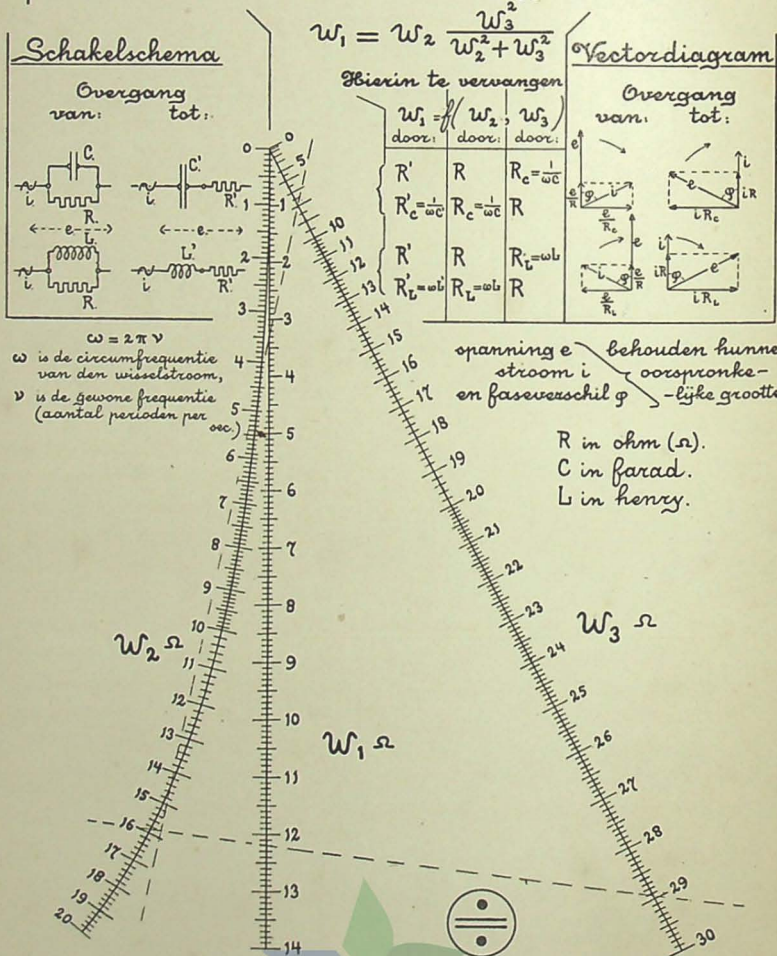


Fig. 40.

De gegeven betrekking kan herleid worden tot

$$\frac{1}{w_1} \cdot \frac{1}{-w_2} + \frac{1}{w_3^2} = \frac{1}{-w_2^2}$$

van type IV.

Als bereik van de veranderlijken is aangenomen:

voor $[z_1] \dots w_1$ van 0 tot 14 Ω
 „ $[z_2] \dots w_3$ „ 0 „ 30 „
 „ $[z_3] \dots w_2$ „ 0 „ 20 „

Dus is:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 0 & f_1(\omega) &= 14 \\ f_2(\alpha) &= 0 & f_2(\omega) &= 900 \\ f_3(\alpha) &= 0 & f_3(\omega) &= -400 \\ \frac{f_3(\alpha)}{g_3(\alpha)} &= 0 & \frac{f_3(\omega)}{g_3(\omega)} &= 20 \\ & & \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} &= \frac{900}{14} \end{aligned}$$

Wij nemen daarom voorloopig $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 60$ en verkrijgen dan figuur 41 als schets van de onderlinge ligging der schalen. De juiste vorm van $[z_3]$ is nog niet bekend.

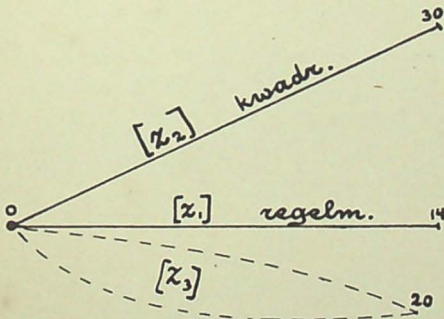


Fig. 41.

Wij zien, dat $[z_2]$ het langst zal moeten worden, omdat deze schaal kwadratisch is en z_2 het grootste bereik heeft. Daarom wordt $[z_1]$ evenwijdig aan de lange rechthoekzijde van het teekenvlak geplaatst.

Voor de oorspronkelijke tekening van figuur 40 werd aangenomen

$$L = 30 \quad B = 21.$$

Dus:

$$\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} = \frac{30}{14}. \text{ Aangenomen } \mu_1 = 2.$$

$[z_1]$ kwam op ongeveer 14,5 c.m. van de rechter-rechthoekzijde. Dus werd $D' = 31,5$ c.m.

en

$$\mu_2 \approx \frac{D'}{k_2} = \frac{31,5}{900}. \text{ Aangenomen } \mu_2 = 0,035.$$

De constructieformules voor de schalen waren dus:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } [z_1] & x = 2w_1 \\ \text{„ } [z_2] & y = 0,035 w_3^2 \\ \text{„ } [z_3] & p = 2w_2 \quad q = -0,035 w_2^2. \end{array}$$

Opdat het alignement ω_1, ω_2 loodrecht op $[z_1]$ zal staan, moet

$$\cos \varphi = \frac{28}{31,5},$$

en is dus

$$\varphi = 27^\circ 16'.$$

Uit de gegeven vergelijking volgt, dat als $w_2 = w_3$ is, $w_1 = 1/2 w_2$ en dus ook $= 1/2 w_3$. Een stel schaalpunten $z_1 = 1/2 \eta$, $z_2 = \eta$ en $z_3 = \eta$ liggen dus op een rechte lijn, bovendien volgt uit de constructieformules voor de schalen, dat de schaalpunten op die verbindingslijn twee gelijke stukken afteekenen. Door van deze eigenschap gebruik te maken, wordt $[z_3]$ het vlugst geconstrueerd.

Als η_1, η_2 en η_3 een waardenstel is, dan is ook $k\eta_1, k\eta_2$ en $k\eta_3$ een waardenstel van de gegeven betrekking; k is weer een willekeurige factor.

Het teeken voor deze eigenschap (zie § 64), is daarom op het nomogram aangebracht.

Toepassing van het nomogram.

Een capaciteit $C = 2200 \mu\mu F = 22 \times 10^{-10}$ Farad, is parallel geschakeld met een weerstand $R = 15,88 \Omega$. De frequentie van den er door gaanden wisselstroom is $\nu = 25 \times 10^5$ perioden per sec. = 2500 kilohertz. (golflengte 120 m). Dus is de circumfrequentie $\omega = 2\pi\nu = 1,5708 \times 10^7$. De capacitive weerstand is dus $R_c = \frac{1}{\omega C} = 28,94 \Omega$.

Het maakt voor de aangesloten keten geen verschil (e, i en φ veranderen niet), als de parallel geschakelde capaciteit en weerstand vervangen worden door een capaciteit en weerstand, elk van bepaalde grootte, in serie geschakeld. Voor het berekenen van den daartoe benodigden weerstand moet gesteld worden:

$$w_1 = R', \quad w_2 = R \quad \text{en} \quad w_3 = R_c.$$

Wij lezen uit het nomogram af (stippellijn):

$$w_1 = R' = 12,20 \Omega.$$

Voor het bepalen van de capaciteit nemen wij, om binnen het bereik der veranderlijken te blijven:

$$w_1 = 1/2 R_c', \quad w_2 = 1/2 R_c \quad \text{en} \quad w_3 = 1/2 R.$$

Daarbij lezen wij af (stippellijn):

$$w_1 = 1/2 R_c' = 3,35 \Omega, \quad \text{dus} \quad R_c' = 6,7 \Omega.$$

Hieruit volgt voor C'

$$C' = \frac{1}{\omega R_c} = \frac{1}{1,5708 \times 10^7 \times 6,7} = 95 \times 10^{-10} \text{ Farad}$$

of

$$C' = 9500 \mu\mu\text{F.}$$

Type V: De derde schaal is een snijdende rechte schaal.

§ 78. Stel in (IV)

$$g_3 = \frac{f_3}{f_3 + 1} \quad (46)$$

, dan wordt de vergelijking (42) voor den drager $[z_3]$

$$p = \frac{\mu_1}{\mu_2} q + \mu_1. \quad (47)$$

Dus voor $q = 0$ is $p = \mu_1$ en voor $p = 0$ is $q = -\mu_2$.

De drager $[z_3]$ is, daar (47) een lineaire betrekking is tusschen p en q , een rechte lijn, welke van de as $[z_1]$ een stuk μ_1 en van de as $[z_2]$ een stuk $-\mu_2$ afsnijdt (figuur 42a). De richting van $[z_3]$ wordt dus bepaald door de verhouding $\frac{\mu_1}{\mu_2} = m$.

De **functievergelijking** van het nieuwe type volgt uit de substitutie van (46) in (IV), en is

$$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3} \quad (V)$$

§ 79. De **constructieformules** voor de schalen zijn:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = \mu_1 f_1 \\ \text{,, } [z_2] \quad y = \mu_2 f_2 \\ \text{,, } [z_3] \quad r = \mu_3 f_3 \end{array} \right\} \quad (48)$$

, waarbij μ_1 , μ_2 en μ_3 met den hoek φ verbonden zijn door den cosinusregel:

$$\mu_3^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2 \mu_1 \mu_2 \cos \varphi \quad (49)$$

Daaruit volgt, dat μ_3 gelijk is aan het stuk, dat door de beide assen $[z_1]$ en $[z_2]$ van $[z_3]$ wordt afgesneden.

Voor $\mu_1 = \mu_2$, stel $= \mu$, maakt $[z_3]$ gelijke hoeken met $[z_1]$ en $[z_2]$ en is

$$\mu_3 = \mu \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2\mu \cos \frac{1}{2} \varphi \quad (50)$$

Voor $\varphi = 120^\circ$ is bovendien $\mu_3 = \mu$ en zijn de drie moduli dus gelijk.

Voor $\mu_1 = -\mu_2$, maakt $[z_3]$ gelijke hoeken met $[z_1]$ en de negatieve richting van $[z_2]$ en is

$$\mu_3 = \mu_1 \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = 2\mu_1 \sin \frac{1}{2} \varphi \quad (51)$$

Is $\varphi = 60^\circ$, dan is weer $\mu_3 = \mu_1$.

De verdere aanwijzingen voor de constructie bij type IV gegeven, gelden grootendeels ook voor dit type.

§ 80. Tweede nomogram met andere ligging van dezelfde schalen.

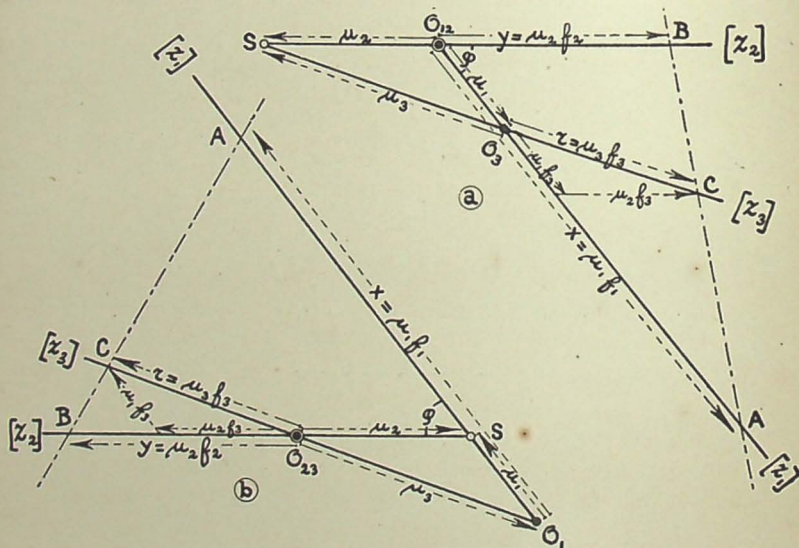


Fig. 42.

Stel in (V):

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 1 - F_1 \\ f_2 &= -1 - F_2 \\ f_3 &= -1 - F_3 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

, dan gaat (V) na eenige herleiding over in:

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3} \quad (V)$$

, wederom van het type V.

Er is dus een tweede nomogram mogelijk, met dezelfde schalen. Zij snijden elkaar alleen eenigzins anders (figuur 42b.)

§ 81. **Rechtstreeksche afleiding van de functievergelijking (V), met de stelling van Menelaos.**

Bij de snijding van drie, volgens een driehoek gelegen rechte lijnen, door een vierde rechte (transversaal), zijn de zes afgesneden stukken zoodanig in twee groepen van drie te verdeelen, dat in elke groep de stukken geen uiteinden gemeen hebben. In figuur 42a, waarin wij de afleeslijn als transversaal aannemen, zijn het:

$O_3A,$ $O_{12}B$ en SC
 en $O_{12}A,$ SB en $O_3C.$

Volgens de *Stelling van Menelaos*, is het gedurig product van de eerste groep, gelijk aan dat van de tweede.

Dus is in figuur 42a:

$$O_3A \times O_{12}B \times SC = O_{12}A \times SB \times O_3C.$$

of;

$$\mu_1(f_1 - 1) \cdot \mu_2 f_2 \cdot \mu_3(f_3 + 1) = \mu_1 f_1 \cdot \mu_2(f_2 + 1) \cdot \mu_3 f_3$$

dus $(f_1 - 1)f_2(f_3 + 1) = f_1(f_2 + 1)f_3$ (53)

hetgeen te herleiden is tot:

$$f_2 + f_2 f_3 + f_1 f_3 = f_1 f_2.$$

Na deeling van beide leden dezer vergelijking door $f_1 f_2 f_3$, verkrijgen wij:

$$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}. \quad (V)$$

Ook voor de tweede schikking der drie schalen (figuur 42b), kan (V) afgeleid worden. De drie stukken van het eene en van het andere stel zijn dan:

$SA,$ $O_{23}B$ en O_1C
 en $O_1A,$ SB en $O_{23}C.$

§ 82. **Voorbeeld. Instellen zonder matglas** ¹⁾ (figuur 43).

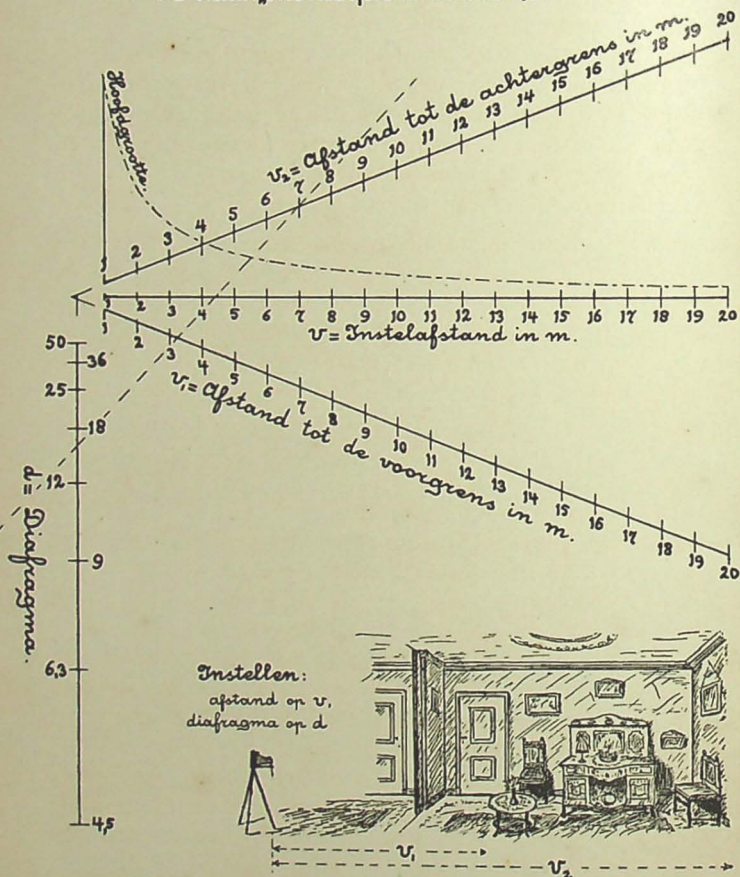
Bij het fotografeeren van een in de diepte opgestelde groep, of van een interieur, kan het te gebruiken diafragma bepaald worden uit de afstanden van de lens tot de voor- en achtergrens van de groep of het interieur, volgens deze betrekking:

¹⁾ Zie ook mijn gelijknamig artikel in het fotografisch tijdschrift „Lux” van 1 September 1922, aflevering 17.

Instellen zonder matglas.

$$v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \quad \text{en} \quad d = \frac{10(v_2 - v_1)f^2}{\{200v_1v_2 - f(v_1 + v_2)\} \cdot 5}$$

$f = \text{max. onscherpthe in m.m.} = 0,1.$



De diafragma-schaal van bovenstaand nomogram is ontworpen, en dus slechts geldig, voor een fotografie-toestel met een brandpuntsafstand $f = 13,5 \text{ c.m.}$

Fig. 43.

$$d = \frac{10(v_2 - v_1)f^2}{\{200v_1v_2 - f(v_1 + v_2)\}\delta}$$

, waarin:

v_1 = afstand (in meters) tot de voorgrens;

v_2 = " " " " " " achtergrens;

d = het minstens te bezigen diafragmanummer, dat is de brandpuntsafstand van het toestel, gedeeld door de middellijn van de diafragmaopening;

δ = grootste toelaatbare middellijn (in mm.), van den beeldcirkel van een punt van de te fotografeeren groep. Hier voor zal 0,1 mm. worden aangenomen, welke „onscherpte”, als beeld van een scherpe overgang zwart-wit, een overgangszône van 0,1 mm. breedte geeft;

f = brandpuntsafstand van de lens in cm.

Om voor deze betrekking een nomogram te kunnen construeeren, moeten de veranderlijken v_1 , v_2 en d *gescheiden* zijn, d.w.z. de gegeven vergelijking moet herleid worden tot een van de besproken, of nog te bespreken typen functievergelijkingen. Wij verwijzen hiervoor naar hoofdstuk 25, waar in § 172 de bovenstaande vergelijking herleid wordt tot:

$$\frac{1}{\frac{100v_1}{f} \left(\frac{5f}{\delta d} - 0,5 \right)} + \frac{1}{100v_1} + \frac{1}{-100v_2} = \frac{1}{\frac{5f}{\delta d} - 0,5}$$

van type V.

Het nomogram (figuur 43) werd ontworpen voor een fotografie-toestel met $f = 13,5$ c.m. De aangenomen grenzen waren:

voor v_1 en v_2 1 tot 20 m.

„ d 4,5 tot 50.

Op het snijdende schalenstel werd tevens een betrekking van het hierna te behandelen type VI voorgesteld, voor het verband tusschen v_1 en v_2 en den instelafstand v . In § 86 wordt dit nomogram nader besproken.

In de oorspronkelijke teekening is de schaal voor den instelafstand 20 cm. lang genomen en in verband daarmee, die voor $[z_1]$ en $[z_2]$ 21,5 cm. en dus $\cos \frac{1}{2} \varphi = 0,367$. Voorts was dus $\mu_1 = \mu_2 = 1,075 \times \frac{13,5}{100} = 0,1451$ en $\mu_3 = 2\mu \cos \frac{1}{2} \varphi = 0,1065$.

De constructieformules voor de schalen waren dus:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } [z_1] & x = 1,075 v_1 \\ \text{„ } [z_2] & y = -1,075 v_2 \\ \text{„ } [z_3] & r = \frac{71,9}{d} - 0,0533. \end{array}$$

$[z_3]$ heeft haar oorsprong op $[z_1]$, op een afstand $\mu_1 = 0,1451$ van den oorsprong O_{12} en snijdt $[z_2]$ in een punt, op een afstand $(-\mu_2)$ van O_{12} .

Op $[z_1]$ en $[z_2]$ zijn slechts de geheele waarden als deelpunten aangegeven. Voor het praktisch gebruik van het nomogram, is dit voldoende. Op $[z_3]$ zijn aangegeven de nummers d , volgens de diafragmanummering van *Dr Rudolf*, zooals deze o.a. op de Zeiss-lenzen is aangebracht

In het nomogram is voorts een kromme lijn geteekend, aangevende de beeldgrootte van het hoofd van een persoon, die zich op een afstand van v meter van de lens bevindt. De grootte van het beeld op de plaat, wordt aangegeven door de lengte van de in het schaalpunt v opgerichte loodlijn, tot aan de kromme.

Toepassing van het nomogram. Zie hiervoor § 86.

Type VI: De derde schaal is een rechte schaal door den oorsprong O

§ 83. Stel in (V)

$$g_3 = 1 \quad (54)$$

, dan is volgens (40)

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \text{constant.}$$

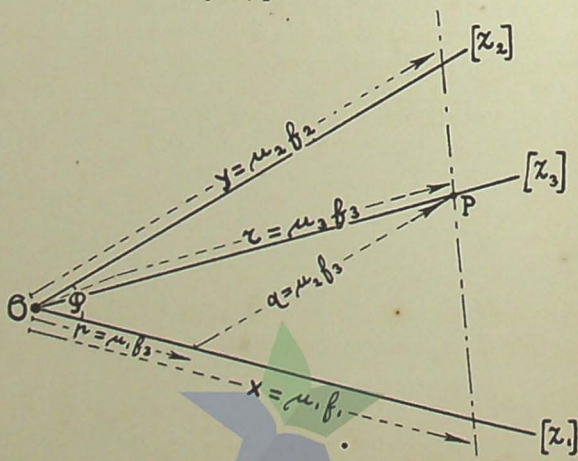


Fig. 44.

Hieruit volgt, dat $[z_3]$ recht is en door den gemeenschappelijken oorsprong O van $[z_1]$ en $[z_2]$ gaat (figuur 44).

De **functievergelijking** van dit nomogramtype, wordt verkregen door substitutie van (54) in (IV), en is:

$$\boxed{\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}} \quad (VI)$$

§ 84. De **constructieformules** zijn geheel dezelfde als bij type V, n.l.:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = \mu_1 f_1 \\ \text{„ } [z_2] \quad y = \mu_2 f_2 \\ \text{„ } [z_3] \quad r = \mu_3 f_3 \end{array} \right\} \quad (55)$$

, waarbij μ_1 , μ_2 en μ_3 met den hoek φ verbonden zijn door den cosinusregel:

$$\mu_3^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2\mu_1\mu_2 \cos \varphi \quad (56)$$

Voor $\mu_1 = \mu_2$, stel $= \mu$, deelt $[z_3]$ den hoek φ middendoor en is:

$$\mu_3 = \mu \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = 2\mu \cos \frac{1}{2} \varphi \quad (57)$$

, waarbij dus voor $\varphi = 120^\circ$ de drie moduli even groot zijn.

Voor $\mu_1 = -\mu_2$ deelt $[z_3]$ het supplement van den hoek φ middendoor en is:

$$\mu_3 = \mu_1 \sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = 2\mu_1 \sin \frac{1}{2} \varphi \quad (58)$$

, waarbij voor $\varphi = 60^\circ$ weer $\mu_3 = \mu_1$ is.

Voor de verdere constructie van dit nomogramtype, gelden weer de aanwijzingen, bij het algemeene type IV gegeven.

§ 85. **1e Voorbeeld.** *Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen.* (figuur 29).

De formule (29) uit § 63

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{\mu_3}$$

, behoort tot type VI. Voor figuur 29 werden de drie moduli even groot genomen, dus was $\varphi = 120^\circ$. Voor de oorspronkelijke teekening was $\mu = 2$, zoodat de constructieformules waren:

$$\left. \begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \quad x = 2\mu_1 \\ \text{„ } [z_2] \quad y = 2\mu_2 \\ \text{„ } [z_3] \quad r = 2\mu_3 \end{array} \right\}$$

Toepassing van het nomogram. Een toepassing van het

nomogram (stippellijn), werd reeds besproken bij het in § 66 behandelde voorbeeld.

§ 86. 2e Voorbeeld. *Instellen zonder matglas* (figuur 43).

De voorstelling van de betrekking tusschen v_1 , v_2 en d , door het nomogram figuur 43, werd in § 82 besproken. In dat nomogram is tevens de betrekking voorgesteld tusschen v_1 en v_2 en den instelafstand v :

$$v = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$$

, in den vorm van (VI) te schrijven, als:

$$\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2} = \frac{1}{v}.$$

Evenals voor v_1 en v_2 , werd voor v een bereik aangenomen van 1 tot 20 meter.

In de oorspronkelijke teekening was met een lengte van 20 cm., dus een modulus $\mu_3 = 1$, voor deze schaal rekening gehouden. Daar $\mu_1 = -\mu_2$ deelt $[z_3]$ het supplement van den hoek φ midden-door en is volgens (58):

$$\mu_1 = -\mu_2 = \frac{\mu_3}{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}$$

, of daar $\sin \frac{1}{2} \varphi = \frac{20}{21,5}$, is $\mu_1 = -\mu_2 = 0,5375$ en waren bijgevoerd de constructieformules:

voor $[z_1]$	$x = 1,075 v_1$
„ $[z_2]$	$y = -1,075 v_2$
„ $[z_3]$	$r = v.$

De schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ vallen dus samen met diezelfde schalen in § 82.

Toepassing van het nomogram.

Een te fotografeeren interieur, heeft een diepte van 3,25 m. tot 7 m. van de lens.

Bij aflezing (stippellijn) blijkt, dat er ingesteld moet worden op ongeveer 4,5 m. en dat een diafragma van omstreeks $f : 18$ genomen moet worden. Een persoon, staande in het midden van het interieur, op 5 m. afstand, zal op de foto een hoofdgrrootte van ongeveer 7 mm. verkrijgen,

Type IVa. De derde schaal ligt op een cirkelboog.**§ 87. Afleiding van de constructieformules.**

Evenals bij type I, kunnen wij bij type IV trachten, voor den drager $[z_3]$ een cirkelboog te verkrijgen. Dit is wellicht mogelijk, wanneer tusschen $\frac{1}{f_3}$ en $\frac{1}{g_3}$ een betrekking is van den 2en graad:

$$\frac{a_0}{f_3^2} + \frac{a_1}{f_3 g_3} + \frac{a_2}{g_3^2} + \frac{a_3}{f_3} + \frac{a_4}{g_3} + a_5 = 0 \quad (59)$$

, waarin $a_0, a_1, \text{ enz.}$ willekeurige coëfficiënten zijn.

Substitueer in (59) de uitdrukkingen voor f_3 en g_3 uit (40), of:

$$\frac{1}{f_3} = \frac{\mu_2}{q} \quad \text{en} \quad \frac{1}{g_3} = \frac{p}{mq}.$$

Na vermenigvuldiging met q^2 verkrijgen wij dan:

$$\frac{a_2}{m^2} p^2 + \frac{a_4}{m} p q + a_5 q^2 + \frac{a_1 \mu_2}{m} p + a_3 \mu_2 q + a_0 \mu_2^2 = 0 \quad (60)$$

Dit is de vergelijking voor den drager $[z_3]$, welke dus een kegelsnede is.

Voor een cirkel, waarvoor de coördinaten van het middelpunt p_0 en q_0 zijn en de straal r is, werd in § 71 op scheefhoekige assen de vergelijking (38) afgeleid:

$$p^2 + 2 \cos \varphi \cdot p q + q^2 - 2(p_0 + q_0 \cos \varphi) p - \\ - 2(p_0 \cos \varphi + q_0) q + (p_0^2 + q_0^2 + 2p_0 q_0 \cos \varphi - r^2) = 0.$$

Wij vermenigvuldigen nu de coëfficiënten van (38), weer met een willekeurigen factor λ en stellen ze dan gelijk aan die van (60).

Uit de zes betrekkingen, welke op die wijze verkregen worden, leiden wij onderstaande formules af, waaruit achtereenvolgens de grootheden berekend kunnen worden, welke de ligging van den cirkelboogvormigen $[z_3]$ bepalen.

$$\begin{aligned}
 m &= \sqrt{\frac{a_2}{a_5}} \\
 \cos \varphi &= \frac{a_4}{2ma_5} = \frac{a_4}{2\sqrt{a_2a_5}} \\
 \frac{p_0}{\mu_2} &= \frac{a_3 \cos \varphi - \frac{a_1}{m}}{2a_5 \sin^2 \varphi} \\
 \frac{q_0}{\mu_2} &= \frac{\frac{a_1}{m} \cos \varphi - a_3}{2a_5 \sin^2 \varphi} \\
 \left(\frac{r}{\mu_2}\right)^2 &= \left(\frac{p_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{\mu_2}\right)^2 + 2\frac{p_0}{\mu_2} \cdot \frac{q_0}{\mu_2} \cos \varphi - \frac{a_0}{a_5}
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Uit deze formules blijkt, dat het niet steeds mogelijk zal zijn, een stel reële waarden voor m , φ , p_0 , q_0 en r te verkrijgen.



HOOFDSTUK 14.

Onderlinge herleiding van de behandelde functie- vergelijkingen.

§ 88. Van de tot dusver besproken nomogramtypen waren, (zie Tabel II op blz. 56 en 57), de typen II, III, V en VI van de 3e orde, de typen I en IV van de 4_0^e orde. De eerste groep had als eenvoudigste nomogramvorm drie rechte schalen, de tweede groep een samenstel van twee rechte schalen en één kromme.

Voor elk der twee groepen geldt de belangrijke eigenschap, dat een betrekking, welke door een nomogram van een der typen van een groep kan worden voorgesteld, eveneens door elk der andere typen kan worden weergegeven.

Van deze eigenschap maken wij gebruik, om voor een gegeven betrekking het meest geschikte nomogram te kunnen uitkiezen, n.l. dat, waarbij het verloop en de ligging van de functieschalen zoo gunstig mogelijk zijn.

§ 89. Voor de bijzondere functievergelijkingen van de 3e orde is in tabel III een overzicht van de onderlinge herleiding gegeven. Met behulp daarvan, kan een, als functievergelijking van een der typen geschreven betrekking, gemakkelijk tot de functievergelijkingen der andere typen worden herleid. Een voorbeeld wordt in § 90 gegeven.

De bij herleiding van de functievergelijkingen (III) en (VI) voorkomende letter **a**, mag elke willekeurige waarde > 0 hebben, behalve de waarde 1.

Eenzoo mag het grondtal, van de bij herleiding van (II) en (V) voorkomende logaritmen, elk willekeurig getal > 0 zijn, weer met uitzondering van het getal 1.

Voor wat de bijzondere functievergelijkingen der 4_0^e orde betreft, is de omvorming zeer eenvoudig. De typen (I) en (IV) worden namelijk tot elkaar herleid, door als nieuwe functies de reciproke van de oorspronkelijke te nemen.

TABEL III.

Onderlinge herleiding van de bijzondere functie-
vergelijkingen van de 3e orde.

type	wordt herleid tot type	door in de functievergelijking van het laatstgenoemde type te stellen:		
		$F_1 =$	$F_2 =$	F_3 of $G_3 =$
II $f_1 g_3 + f_2 = 0$	III	$\log f_1$	$-\log(-f_2)$	$-\log g_3$
	V	$\frac{1}{1-f_1}$	$\frac{-1}{1+f_2}$	$\frac{-1}{1-g_3}$
		$\frac{-f_1}{1-f_1}$	$\frac{-f_2}{1+f_2}$	$\frac{g_3}{1-g_3}$
VI	$\frac{1}{\log f_1}$	$\frac{-1}{\log(-f_2)}$	$\frac{-1}{\log g_3}$	
III $f_1 + f_2 = f_3$	II	a^{f_1}	$\frac{-1}{a^{f_2}}$	$\frac{1}{a^{f_3}}$
	V	$\frac{1}{1-a^{f_1}}$	$\frac{a^{f_2}}{1-a^{f_2}}$	$\frac{a^{f_3}}{1-a^{f_3}}$
		$\frac{-a^{f_1}}{1-a^{f_1}}$	$\frac{-1}{1-a^{f_2}}$	$\frac{-1}{1-a^{f_3}}$
	VI	$\frac{1}{f_1}$	$\frac{1}{f_2}$	$\frac{1}{f_3}$
V $\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	II	$\frac{f_1-1}{f_1}$	$\frac{f_2+1}{-f_2}$	$\frac{f_3+1}{f_3}$
	III	$\log \frac{f_1-1}{f_1}$	$\log \frac{f_2}{f_2+1}$	$\log \frac{f_3}{f_3+1}$
	V	$1-f_1$	$-(1+f_2)$	$-(1+f_3)$
	VI	$\frac{1}{\log(f_1-1) - \log f_1}$	$\frac{1}{\log f_2 - \log(f_2+1)}$	$\frac{1}{\log f_3 - \log(f_3+1)}$
VI $\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	II	$\frac{f_1}{\sqrt{a}}$	$-\sqrt{\frac{1}{a}}$	$\sqrt{\frac{1}{a}}$
	III	$\frac{1}{f_1}$	$\frac{1}{f_2}$	$\frac{1}{f_3}$
	V	$\frac{1}{1-\sqrt{a}}$	$\frac{f_2}{\sqrt{a}}$	$\frac{f_3}{\sqrt{a}}$
		$\frac{f_1}{-\sqrt{a}}$	$1-\sqrt{a}$	$1-\sqrt{a}$
		$\frac{f_1}{1-\sqrt{a}}$	$\frac{-1}{f_2}$	$\frac{-1}{f_3}$

§ 90. **Voorbeeld.** De dikte van houten schotbalken kan worden berekend met de formule:

$$d = L \sqrt[3]{\frac{750 H}{T}}$$

, waarin

H = het te keeren watersverschil in m .

T = de in het hout toe te laten buigspanning, in kg. per $cm.^2$

L = de lengte of overspanning van den schotbalk in m .

d = de dikte van den schotbalk in cm .

Voor eiken- of grenenhout, waarvoor $T = 100$, wordt de formule:

$$d = 2.74 L \sqrt[3]{H}$$

, of geschreven als (II):

$$(2,74 L) \cdot (\sqrt[3]{H}) + (-d) = 0$$

, hetgeen dus een nomogram zou geven met regelmatige [L] en [d] op de evenwijdige assen en een met $\sqrt[3]{H}$ projectieve schaal, diagonaalsgewijze er tusschen.

Ter herleiding van de vergelijking tot (III), nemen wij nu dus:

$$F_1 = \log L + 0,437$$

$$F_2 = - \log d$$

$$F_3 = - \frac{1}{2} \log H$$

en verkrijgen dan:

$$(\log L + 0,437) + (- \log d) = - \frac{1}{2} \log H$$

of

$$(\log L + 0,437) + \frac{1}{2} \log H = \log d$$

en dus een nomogram met drie evenwijdige logarithmische schalen, waarvan die voor de meestal gezochte veranderlijke d , in het midden ligt.



HOOFDSTUK 15.

**Verbetering van nomogrammen door projectieve
vervorming van de schalen.**

§ 91. Bij het zoeken naar een geschikt nomogram voor een betrekking, komt het dikwijls voor, dat geen der behandelde typen voldoet, omdat een of meer veranderlijken daarbij door ongunstige schalen zouden moeten worden voorgesteld.

Die schalen zijn dan meestal ongunstig, omdat de gewenschte middenwaarde ν , te veel uit het midden valt.

Door een projectieve vervorming van de schalen, kan hierin verbetering gebracht worden.

De mogelijkheid van een zoodanige vervorming, kan met behulp van eenige stellingen uit de *Projectieve Meetkunde*, op eenvoudige wijze worden aangetoond (figuur 45).

Voor een waarde van z_3 , voorgesteld door het schaalpunt S, stellen de punten A_1 en A_2 , B_1 en B_2 , C_1 en C_2 , eenige paren bijeenbehorende waarden van z_1 en z_2 voor. Hiervoor is dus S het perspectiefcentrum. De twee schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, worden uit twee punten, P_1 en P_2 , zoodanig op andere dragers geprojecteerd, dat op deze laatste ν juist in het midden tusschen α en ω valt.

Volgens de Projectieve Meetkunde is nu ¹⁾:

$$(O_{12}A_1B_1C_1 \dots) \wedge (O_{12}A_2B_2C_2 \dots)$$

en verder:

$$(O_{12}A_1B_1C_1 \dots) \wedge (O_1'A_1'B_1'C_1' \dots)$$

$$(O_{12}A_2B_2C_2 \dots) \wedge (O_2'A_2'B_2'C_2' \dots)$$

dus:

$$(O_1'A_1'B_1'C_1' \dots) \overline{\wedge} (O_2'A_2'B_2'C_2' \dots)$$

Wanneer twee toegevoegde punten van de beide laatste schalen tot samenvalling gebracht worden, is dus:

$$(O_1'A_1'B_1'C_1' \dots) \wedge (O_2'A_2'B_2'C_2' \dots)$$

Nu is het snijpunt O_{12} , als dekpunt, het eenige punt van $[z_1]$, dat bij een verplaatsing van S langs $[z_3]$, aan hetzelfde punt van $[z_2]$, — namelijk zich zelf —, toegevoegd blijft. Bij evenwijdige

¹⁾ Zie blz. 39.

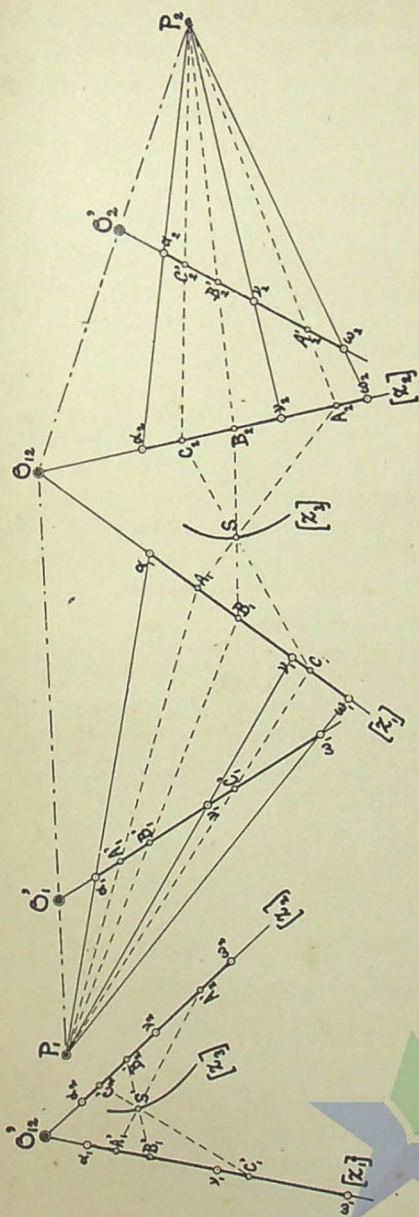


Fig. 45.

assen, valt O_{12} in het oneindige en zijn O_1' en O_2' , de aan O_{12} toegevoegde vluchtpunten.

De vervormde schalen moeten dus zóó geplaatst worden, dat O_1' op O_2' valt, alsdan is' (figuur 45 links):

$$(O_{12}'A_1'B_1'C_1' \dots) \wedge \\ \wedge (O_{12}'A_2'B_2'C_2' \dots)$$

, en snijden de alignementen $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ en $C_1'C_2'$ enz. elkander in het nieuwe perspectiefcentrum S' .

§ 92. De ruimtelijke perspectivische vervorming, is als een bijzonder geval van het voorgaande te beschouwen. Wanneer n.l. in figuur 45:

$$O_{12}P_1 = O_{12}P_2$$

en

$$O_{12}O_1' = O_{12}O_2'$$

zou zijn, dan zou deze figuur een uitslag kunnen wezen van een drievlaks-hoek, met de zijvlakken $P_1O_{12}C_1$, $C_1O_{12}A_2$ en $A_2O_{12}P_2$, welke gesneden worden door het vlak $C_1'O_{12}'A_2'$. De tophoek van dit vlak zou, in dat geval, bovendien een bepaalde grootte moeten hebben.

§ 93. Hoewel dat, uit een oogpunt van nauwkeurigheid, niet altijd de voorkeur verdient, kun-

nen de vervormde schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ grafisch, — als in figuur 45 —, verkregen worden. Voor de schaal $[z_3]$ echter, is deze wijze van constructie in het algemeen te omslachtig. Meestal is zij nog het gemakkelijkst uit te voeren met behulp van uit de gegeven betrekking rechtstreeks afgeleide alignementen. Soms vormen deze dan waaiers, met den top op $[z_1]$ of $[z_2]$.

Aan de analytische afleiding van een nieuwe functievergelijking, waaruit de constructieformules voor de vervormde schalen volgen, moet, wegens de grootere nauwkeurigheid, de voorkeur worden gegeven.

§ 94. Voor de projectieve vervorming leiden wij als volgt de noodige formules af.

Wij stellen (figuur 46):
op de oorspronkelijke schaal:

$$\left. \begin{aligned} f(v) - f(a) &= a \\ f(\omega) - f(v) &= b \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

en op de vervormde schaal

$$F(\omega) - F(v) = F(v) - F(a) = d \quad (63)$$

De nieuwe schaal is zoo geplaatst, dat zij, met de oorspronkelijke, het schaalpunt v gemeen heeft. Door evenwijdige verschuiving, kan de nieuwe schaal tot op elke gewenschte lengte gelijkvormig verkleind of vergroot worden.

Voor $\triangle BCC'$ met de transversaal PA, is volgens de *stelling van Menelaos* (zie blz. 103):

$$PC \cdot a \cdot 2d = PC' \cdot (a + b) \cdot d$$

dus:

$$\frac{PC}{PC'} = \frac{a + b}{2a} \quad \text{en dus} \quad \frac{C'C}{PC'} = \frac{b - a}{2a}.$$

Bijgevolg is:

$$PO' = \frac{2ab}{b - a} \quad \text{en} \quad O'C' = \frac{2ad}{b - a}$$

In het parallellogram $PO'BD$, hebben dus de zijden een lengte:

$$\frac{2ab}{b - a} \quad \text{en} \quad \frac{b + a}{b - a}d.$$

Het product van die zijden, hetwelk wij W stellen, is dan:

$$W = \frac{2abd(b + a)}{(b - a)^2} \quad (64)$$

, terwijl de lengte OD, aangeduid met c , is:

$$c = \frac{2ab}{b - a} - a - f(a) = \frac{b + a}{b - a}a - f(a) \quad (65)$$

Nu heeft het parallellogram de eigenschap, dat een, uit een hoekpunt getrokken transversaal, de overstaande zijden zóó snijdt,

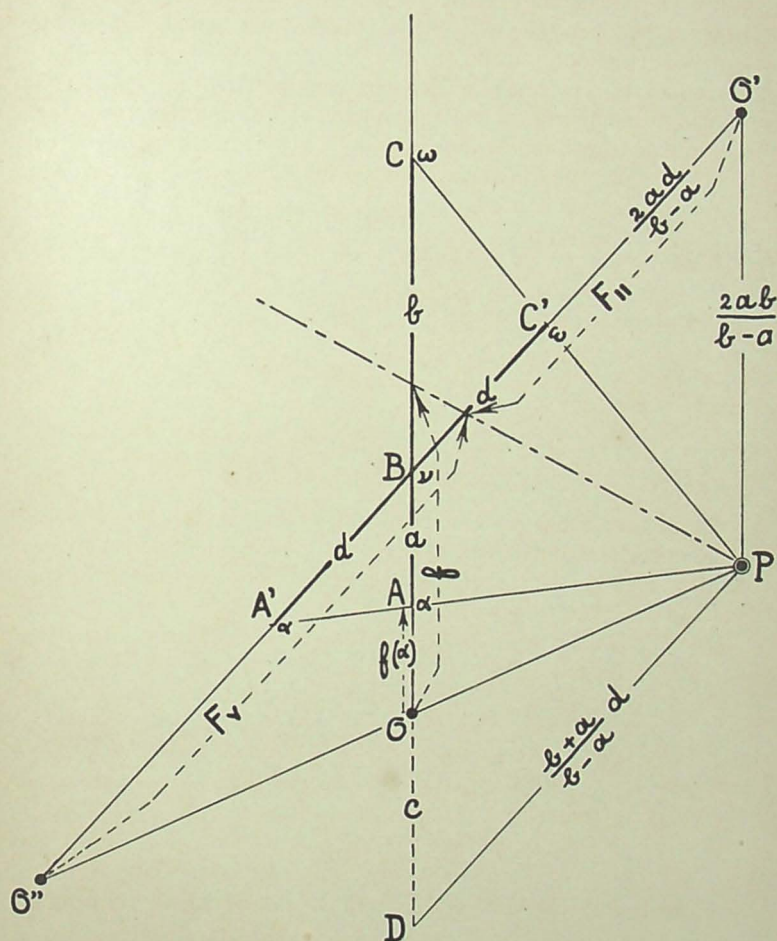


Fig. 46.

dat het product van de afgesneden stukken constant is en gelijk aan het product van de geheele zijden.

Het bewijs hiervan werd reeds op blz. 39 gegeven.

In figuur 46 is dus:

1^o. voor oorspronkelijk evenwijdige (dat is in het oneindige snijdende) assen, waarvoor de nieuwe oorsprong O' is:

$$F_{II} = \frac{W}{f+c} \quad (66)$$

2^o. voor oorspronkelijk in O snijdende assen, waarvoor de nieuwe oorsprong O'' is:

$$F_V = \frac{W}{c} - \frac{W}{f+c} = \frac{W}{c} \cdot \frac{f}{f+c} \quad (67)$$

Daar wij de nieuwe schalen, met behulp van de te kiezen moduli, toch gelijkvormig kunnen vergrooten of verkleinen, behoeft W niet de waarde (64) te verkrijgen, maar kan naar believen gekozen worden. In de uitdrukking voor F_V , kan dus de factor c uit den noemer, opgenomen worden in die waarde W .

De nieuwe functies moeten dus zijn van den vorm:

$$F_{II} = \frac{W}{f+c} \quad \text{en} \quad F_V = \frac{Wf}{f+c} \quad (68)$$

Uit (62) en (65) volgt voor c ,

$$c = \frac{f(v)[f(a) + f(\omega)] - 2f(a) \cdot f(\omega)}{f(a) + f(\omega) - 2f(v)} \quad (69)$$

Met behulp van de formules (68) en (69), kan nu de analytische vervorming van de schalen, op eenvoudige wijze plaats vinden.

Tusschen de nieuwe en de oude functies, bestaan daarbij betrekkingen van den vorm (68), waarin voor W de eenheid of een functie van c gesubstitueerd is.

Tabel IV geeft, voor de behandelde typen van functievergelijkingen, geheel aan, hoe de verbeterde vergelijkingen verkregen worden. Bij twee der rechte schalen, wordt daarmede de gewenschte waarde in het midden van de schaal gebracht. Daar in het algemeen ν_1 , ν_2 en ν_3 , zeer globaal een waardenstel vormen, zal ook op de derde schaal de gewenschte middenwaarde een vrij gunstige ligging verkrijgen.

Opmerking. Uit formule 69 volgt:

1^o. is $f(v)$ het *harmonisch gemiddelde* van $f(a)$ en $f(\omega)$, dus is $f(v) = \frac{2f(a)f(\omega)}{f(a) + f(\omega)}$, dan is $c = 0$;

2^o. is $f(v)$ het *meetkundig gemiddelde* van $f(a)$ en $f(\omega)$, dus is $f(v) = \sqrt{f(a)f(\omega)}$, dan is eveneens $c = \sqrt{f(a)f(\omega)}$;

TABEL IV.

Verbetering van nomogrammen door projectieve vervorming van de schalen.								
De oorspronkelijke functievergelijking is:	van het type:	De verbeterde functievergelijking is:	deze is van het type:	De verbeterde functies worden als volgt uit de oorspronkelijke functies berekend:				
				$F_1 =$	$F_2 =$	$F_3 =$	$G_3 =$	daarbij is:
$f_1 g_3 + f_3 = f_3$	I	$\frac{1}{F_1 G_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	IV	$\frac{1}{f_1 + c_1}$	$\frac{1}{f_2 + c_2}$	$\frac{1}{f_3 + c_1 g_3 + c_2}$	$\frac{1}{g_3}$	
$f_3 g_3 + f_2 = 0$	II	$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	V	$\frac{c_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{-c_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{-c_3}{g_3 + c_3}$		$c_3 = \frac{c_2}{c_1}$
$f_1 + f_2 = f_3$	III	$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{1}{f_1 + c_1}$	$\frac{1}{f_2 + c_2}$	$\frac{1}{f_3 + c_3}$		$c_3 = c_1 + c_2$
$\frac{1}{f_1 g_3} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	IV	$\frac{1}{F_1 G_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	IV	$\frac{c_1 f_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{c_2 f_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{1}{\frac{1}{f_3} + \frac{1}{c_1 g_3} + \frac{1}{c_2}}$	g_3	
$\frac{1}{f_1 f_3} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	V	$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	V	$\frac{(c_1 + 1)f_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{(c_2 - 1)f_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{(c_3 - 1)f_3}{f_3 + c_3}$		$c_3 = \frac{c_1 c_2 + c_2}{c_1 + c_2}$
$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}$	VI	$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{c_1 f_1}{f_1 + c_1}$	$\frac{c_2 f_2}{f_2 + c_2}$	$\frac{c_3 f_3}{f_3 + c_3}$		$c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$

, waarbij, voor (de) twee rechte schalen, c wordt bepaald uit:

$$c = \frac{f(v)[f(a) + f(\omega)] - 2f(a)f(\omega)}{f(a) + f(\omega) - 2f(v)} \dots \dots \dots (69)$$

30. is $f(v)$ het *rekenkundig gemiddelde* van $f(a)$ en $f(\omega)$, dus is $f(v) = \frac{f(a) + f(\omega)}{2}$, waarbij v dus reeds midden tusschen a en ω gelegen is, dan is $c = \infty$;

40. is $f(v) = \frac{f(a) + 2f(\omega)}{3}$, dan is $c = f(a) - 2f(\omega)$ en is $f(v) = \frac{2f(a) + f(\omega)}{3}$, dan is $c = f(\omega) - 2f(a)$ (zie § 96).

50. is $f(a) = 0$, dan is $c = \frac{f(v)f(\omega)}{f(\omega) - 2f(v)}$; is $f(\omega) = \infty$, dan is $c = f(v) - 2f(a)$ en is $f(a) = 0$ en $f(\omega) = \infty$, dan is $c = f(v)$.

§ 95. Verlenging of verkorting der schaaldeelen bij projectieve vervorming.

In figuur 47 zijn met ε en ζ twee schaaldeelen aangeduid, aan de einden van de te vervormen schaal gelegen. Wij veronderstellen deze deelen zeer klein, zoodat het verschil in lengte van de twee stralen uit **P**, die elk deel insluiten, ten opzichte van de lengte dezer stralen zelf, mag worden verwaarloosd. Daar deze verhouding kleiner genomen kan worden dan elk denkbaar getal, hoe klein ook, is die onderstelling geoorloofd.

De relatieve lengte van ε , ten opzichte van de oorspronkelijke schaal, is $\frac{\varepsilon}{b+a}$ en die van ε' , ten opzichte van de vervormde schaal, $\frac{\varepsilon'}{2d}$.

Nu is uit figuur 47 af te leiden:

$$\varepsilon' = \frac{2ad}{b-a} \cdot \frac{d}{b} \varepsilon = \frac{2a}{b+a} \cdot \frac{d}{b} \varepsilon. \quad (70)$$

en dus:

$$\frac{\varepsilon'}{2d} : \frac{\varepsilon}{b+a} = a : b. \quad (71)$$

Evenzoo is af te leiden:

$$\zeta' = \frac{2bd}{b-a} \cdot \frac{d}{a} \zeta = \frac{2b}{b+a} \cdot \frac{d}{a} \zeta \quad (72)$$

dus:

$$\frac{\zeta'}{2d} : \frac{\zeta}{b+a} = b : a. \quad (73)$$

c. Projectieve vervorming.

In figuur 48 is $[l]$ ongunstig, daarentegen $[q]$ zeer gunstig. Bij projectieve verbetering mag laatstgenoemde schaal dus zoo min mogelijk vervormd worden. Willen wij $[d]$ als middenschaal behouden, en kiezen voor $[l]$, $\nu_1 = 4$, dan moet voor $[q]$, ν_2 ongeveer $\frac{2}{3} \times 800$ genomen worden. Aangenomen werd $\nu_2 = 540$.

Wij zullen dus een nomogram construeeren voor:

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 8 & \nu_1 = 4 & \omega_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 & \nu_2 = 540 & \omega_2 = 800 \end{array}$$

Dus is volgens (69):

$$c_1 = \frac{1}{0,0149 \times 16} \left(\frac{1}{0,0149 \times 64} + \frac{1}{0,0149} \right) - \frac{2}{0,0149^2 \times 64} = 2,428$$

$$\frac{1}{0,0149 \times 64} + \frac{1}{0,0149} - \frac{2}{0,0149 \times 16}$$

en

$$c_2 = \frac{-540(0 - 800)}{-800 + 1080} = 1543.$$

De verbeterde functies zijn dus:

$$F_1 = \frac{1}{f_1 + c_1} = \frac{0,4118 l^2}{l^2 + 27,64}$$

$$F_2 = \frac{1}{f_2 + c_2} = \frac{1}{1543 - q}$$

$$F_3 = \frac{1}{f_3 + c_1 g_3 + c_2} = \frac{1}{2,145 d^2 + 19,435 d + 1545,4}$$

$$G_3 = \frac{1}{g_3} = \frac{1}{(0,94 d - 1)^2}$$

De bepaling van μ_1 en μ_2 geschiedt volgens de in § 76 verstrekte aanwijzingen.

$$k_1 = F_1(\omega) - F_1(\alpha) = 0,4118 \left(\frac{64}{91,64} - \frac{1}{28,64} \right) = 0,273^1)$$

$$\text{dus } \frac{k_1}{F_1(\omega)} = \frac{\frac{64}{91,64} - \frac{1}{28,64}}{\frac{64}{91,64}} = 0,95$$

$$k_2 = F_2(\omega) - F_2(\alpha) = \frac{1}{743} - \frac{1}{1543}$$

$$\text{dus } \frac{k_2}{F_2(\omega)} = \frac{\frac{1}{743} - \frac{1}{1543}}{\frac{1}{743}} = 0,518.$$

1) Voor f_1 was $\alpha = 8$ en $\omega = 1$, voor F_1 daarentegen is $\alpha = 1$ en $\omega = 8$.

Het was, volgens het gestelde aan het einde van § 96, te voorzien, dat de laatste uitkomst ongeveer 0,5 zou wezen. Uit de berekende waarden volgt, dat $[z_2]$ ongeveer langs de diagonaal van het teekenvlak zal moeten liggen.

Voor de oorspronkelijke tekening van figuur 50 werd aangenomen $L \approx 33$.

Dus $\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} = \frac{33}{0,273} = 120,8$. Aangenomen werd $0,4118 \mu_1 = 50$, dus $\mu_1 = 121,42$.

De afstand van den oorsprong tot het beginpunt van de schaal $[z_1]$ is:

$$\mu_1 F_1(\alpha) = 1,746.$$

De lengte van de diagonaal kan nu worden opgemeten. In de oorspronkelijke tekening was $D = 41$.

Dus was $\mu_2 \approx \frac{D}{F_2(\omega)} = 30463$. Aangenomen werd $\mu_2 = 30.000$.

Ligging van de eindpunten van $[z_1]$ en $[z_2]$ en contrôle op de ligging der gewenschte middenwaarden:

$$\mu_1 F_1(\omega) = \frac{50 \times 64}{91,64} = 34,920$$

$$\mu_1 F_1(\alpha) = \frac{50 \times 1}{28,64} = 1,746$$

af _____ op
schaallengte $[z_1] = 33,174$ $36,666 \times \frac{1}{2} = 18,333$

$$\mu_1 F_1(\nu) = \frac{50 \times 16}{43,64}, \text{ dus eveneens gelijk aan } \dots \dots \dots 18,333$$

$$\mu_2 F_2(\omega) = \frac{30.000}{743} = 40,376$$

$$\mu_2 F_2(\alpha) = \frac{30.000}{15,43} = 19,442$$

af _____ op
schaallengte $[z_2] = 20,934$ $59,818 \times \frac{1}{2} = 29,909$

$$\mu_2 F_2(\nu) = \frac{30.000}{1003}, \text{ dus eveneens gelijk aan } \dots \dots \dots 29,909$$

Verdere constructie van de drie schalen.

$[z_1]$ wordt berekend voor ronde waarden van z_1 , daarna verder geteekend met behulp van den interpolator.

[z_2] is projectief en kan dus door projectie van een regelmatige schaal geconstrueerd worden.

[z_3] kan het vlugst verkregen worden uit de snijding van twee projecteerende bundels, b.v.:

1°. van $z_1 = \infty$ naar $z_2 = -24 z_3$

2°. van $z_2 = 720$ naar

$$z_1 = 1,572 \frac{z_3 - 1,063}{\sqrt{z_3 + 30}}$$

Deze twee betrekkingen volgen rechtstreeks uit de gegeven vergelijking.

Toepassing van het nomogram.

Tusschen twee muren, op een onderlinge afstand van 4,60 m., moet een gewapend betonplaat gelegd worden, welke behalve het eigen gewicht, een belasting moet kunnen dragen van 600 kg./m². Bij een eerste aflezing over deze twee waarden, verkrijgen wij voor d ongeveer de waarde 21.

Wij lezen nu nog een tweede maal af voor $l = 4,60 + 0,22 = 4,82$ en $q = 600$ en vinden dan (stippellijn), $d =$ ruim 22 cm.

Was omgekeerd gevraagd, voor een plaat, waarvoor $l = 4,82$ m. en $d =$ ruim 22 cm., de toe te laten belasting te bepalen, dan had onmiddellijk $q = 600$ kg./m². afgelezen kunnen worden.

§ 98. 2e Voorbeeld. *Bepaling der hoekcorrectie bij indirect gericht vuur* (figuur 51).

De voor te stellen betrekking is:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \varrho}$$

Voor de beteekenis der veranderlijken, wordt naar de toelichende schets in figuur 51 verwezen. De verhouding van den afstand a , tot de basislengte b , wordt aangeduid door de grieksche letter ϱ (rho). De gegeven vergelijking wordt als type (IV) geschreven:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon \cdot \operatorname{cosec} \varphi} + \frac{1}{\frac{1}{\varrho}} = \frac{1}{\operatorname{sec} \varphi}$$

Het bereik der veranderlijken is:

voor z_1 , dat is voor ε van 0° tot 12°

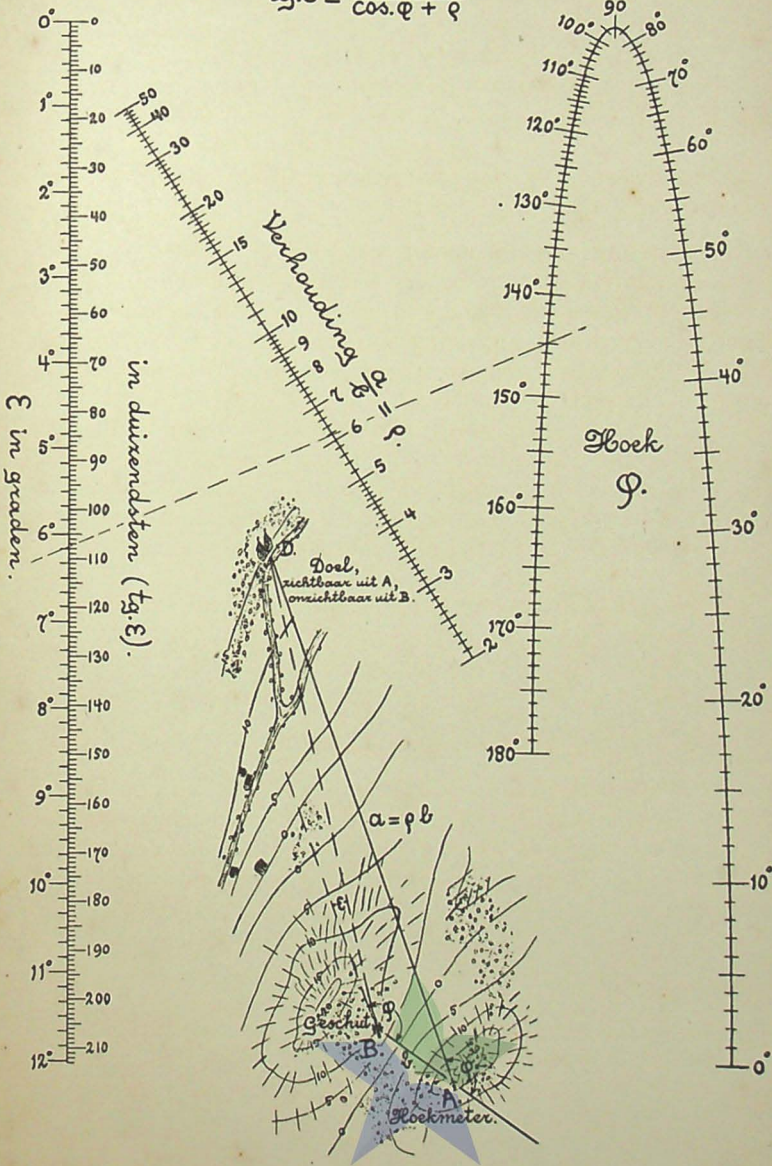
„ z_2 , „ „ „ ϱ „ 2 „ 50

„ z_3 , „ „ „ φ „ 0° „ 180° .

Bepaling der Hoekcorrectie bij indirect gericht vuur.

Correctie.

$$\text{tg. } \epsilon = \frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi + \rho}$$



PERPUSTAKAN NASIONAL
Fig. 51 AN

Zonder vervorming, zal dus $[z_1]$ een gunstig, daarentegen $[z_2]$ een ongunstig verloop hebben.

Voor de projectieve verbetering nemen wij dus, ten einde $[z_1]$ onveranderd te laten, (hetgeen bij type IV mogelijk is) $c_1 = \infty$.

De waarde van c_2 willen wij, in het onderhavige geval, niet geheel van de verlangde middenwaarde voor z_2 , maar ook van den voor $[z_3]$ gewenschten vorm, laten afhangen.

Na de projectieve vervorming, zijn de functies:

$$\begin{aligned} F_1 & \dots \dots \dots \text{tg } \varepsilon \\ F_2 & \dots \dots \dots \frac{1}{\frac{1}{c_2} - \varrho} \\ F_3 & \dots \dots \dots \frac{1}{\cos \varphi + \frac{1}{c_2}} \\ G_3 & \dots \dots \dots \text{cosec } \varphi \end{aligned}$$

Dus is:

$$\text{voor } [z_1] \dots \dots \dots x = \mu_1 \text{tg } \varepsilon$$

$$\text{" } [z_2] \dots \dots \dots y = \frac{\mu_2}{\frac{1}{c_2} - \varrho}$$

$$\text{" } [z_3] \dots \dots \dots p = \frac{\mu_1 \sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{1}{c_2}} \dots \dots q = \frac{\mu_2}{\cos \varphi + \frac{1}{c_2}}$$

Uit de gegeven betrekking kan worden afgeleid, dat de schaalpunten $z_3 = 0^\circ$ en $z_3 = 180^\circ$ op den drager $[z_2]$ liggen en onderscheidenlijk samenvallen met de schaalpunten $z_2 = -1$ en $z_2 = 1$.

Uit de constructieformules voor $[z_3]$ volgt voorts:

$$\frac{p}{q} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \varphi$$

, zoodat een lijn door O , de schaal $[z_3]$ zal snijden in twee schaalpunten, welker waarden te zamen 180° zijn.

Voor $\varphi = 90^\circ$ is die lijn dus een raaklijn aan $[z_3]$.

Wij trachten nu een nomogram te verkrijgen, waarbij deze raak-

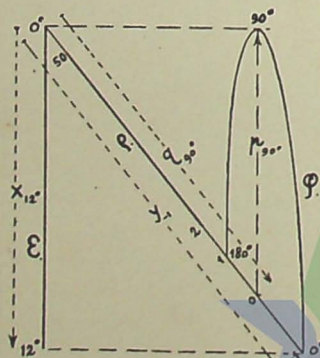


Fig. 52

lijn in $\varphi = 90^\circ$, ongeveer evenwijdig is aan de verbindingslijn der onderste schaalpunten $\varepsilon = 12^\circ$ en $\varrho = -1$ (figuur 52).

De gestelde voorwaarde is vervuld als:

$$\frac{-p_{90^\circ}}{q_{90^\circ}} = \frac{x_{12^\circ}}{y_{-1}}$$

, dus als

$$\frac{-\mu_1 c_2}{\mu_2 c_2} = \frac{\mu_1 \operatorname{tg} 12^\circ}{\frac{\mu_2}{\frac{1}{c_2} + 1}}$$

$$\text{dus } \frac{1}{c_2} = -\operatorname{cotg} 12^\circ - 1 = -5,7046.$$

In de oorspronkelijke tekening voor figuur 51, werd aangenomen $L \approx 33$ en $D \approx 38$, dus

$$\mu_1 \approx \frac{L}{k_1} = \frac{33}{0,21256}$$

, aangenomen werd $\mu_1 = 150$;

$$\mu_2 \approx \frac{D}{\frac{c_2}{1 + c_2}} = -38 \operatorname{cotg} 12^\circ = -178,775$$

, aangenomen werd $\mu_2 = -178$.

De constructieformules waren dus:

$$\text{voor } [z_1] \quad \dots \quad x = 150 \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$\text{,, } [z_2] \quad \dots \quad y = \frac{178}{5,7046 + \varrho}$$

$$\text{,, } [z_3] \quad \dots \quad p = \frac{-150 \sin \varphi}{5,7046 - \cos \varphi} \quad q = \frac{178}{5,7046 - \cos \varphi}$$

Het teekenen van de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, behoeft nu geen toelichting meer. $[z_1]$ werd tevens voorzien van een verdeling in duizendsten ($\operatorname{tg} \varepsilon$), welke dus regelmatig is. $[z_3]$ werd ten deele verkregen met de constructieformules; gedeeltelijk ook door projectie (volgens § 75), o.a. door gebruikmaking van de eigenschap, dat voor $\varrho = 1$, $\varphi = 2\varepsilon$.

Het besproken nomogram kan eveneens bij afstandmeting gebruikt worden, waarbij b weer de basis is.

Toepassing van het nomogram.

Bij een basislengte b , van hoekmeter tot geschut, van 400 m., wordt een afstand a opgemeten van 2463 m., zoodat $\varrho = 6,157$.

De hoek φ wordt bepaald op $144^{\circ}57'$. Met behulp van het nomogram (stippellijn), vinden wij, dat de, in dit geval negatieve correctie ε , $6^{\circ}8,5'$ bedraagt, zoodat de gecorrigeerde hoek gelijk is aan $138^{\circ}48,5'$.

Laat men de as van den vuurmond dezen hoek maken met de richting naar den hoekmeter, dan is die vuurmond op het — van daaruit onzichtbare — doel gericht.

Projectief vervormde nomogrammen, waarbij de derde schaal op een cirkelboog ligt.

§ 99. Nadat een vergelijking van het type I of IV, waarin f_3 en g_3 door een betrekking van den 2en graad verbonden zijn, ten einde gunstiger schalen te verkrijgen, projectief is vervormd, kan getracht worden voor het nieuwe nomogram volgens § 87, een cirkelboogvormigen $[z_3]$ te verkrijgen.

Déze en de projectieve vervorming, kunnen echter ook gelijktijdig plaats hebben. Daar wij in de keuze van ν voor de twee rechte schalen, altijd eenige vrijheid hebben, is de gecombineerde methode soepeler en is daarmede gemakkelijker een geschikt nomogram met cirkelboogvormige $[z_3]$ te verkrijgen. De benodigde formules worden, op overeenkomstige wijze als in de §§ 71 en 87, afgeleid.

§ 100. Afleiding van de constructieformules

Stel dat de gegeven betrekking geschreven is als type (I)

$$f_1 g_3 + f_2 = f_3$$

, waarbij tusschen f_3 en g_3 weer de algemeene betrekking van den 2en graad is:

$$b_0 f_3^2 + b_1 f_3 g_3 + b_2 g_3^2 + b_3 f_3 + b_4 g_3 + b_5 = 0 \quad (76)$$

Bij de projectieve vervorming tot:

$$\frac{1}{F_1 G_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$$

, is o.a.

$$F_3 = \frac{1}{f_3 + c_1 g_3 + c_2} \quad \text{en} \quad G_3 = \frac{1}{g_3}$$

, dus omgekeerd is:

$$f_3 = \frac{1}{F_3} - \frac{c_1}{G_3} - c_2 \quad \text{en} \quad g_3 = \frac{1}{G_3}$$

Na substitutie van laatstgenoemde vormen in (76), gaat deze vergelijking over in:

$$\left. \begin{aligned} & b_0 \frac{1}{F_3^2} + (b_1 - 2b_0c_1) \frac{1}{F_3G_3} + (b_2 - b_1c_1 + b_0c_1^2) \frac{1}{G_3^2} + \\ & + (b_3 - 2b_0c_2) \frac{1}{F_3} + (b_4 - b_3c_1 - b_1c_2 + 2b_0c_1c_2) \frac{1}{G_3} + \\ & + (b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2) = 0 \end{aligned} \right\} (77)$$

Dit is dus een 2e graads-vergelijking tusschen $\frac{1}{F_3}$ en $\frac{1}{G_3}$, overeenkomstig (59), zoodat wij daarop de formules (61) mogen toepassen. Wij verkrijgen dan, ter bepaling van de 7 veranderlijken $\mu_1, \mu_2, \varphi, p_0, q_0, r, c_1$ en c_2 , het volgende stel formules:

$$\left. \begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{b_2 - b_1c_1 + b_0c_1^2}{b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{b_4 - b_3c_1 - b_1c_2 + 2b_0c_1c_2}{2m(b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2)} \\ \frac{p_0}{\mu_2} &= \frac{(b_3 - 2b_0c_2) \cos \varphi - \frac{b_1 - 2b_0c_1}{m}}{2(b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2) \sin^2 \varphi} \\ \frac{q_0}{\mu_2} &= \frac{\frac{b_1 - 2b_0c_1}{m} \cos \varphi - (b_3 - 2b_0c_2)}{2(b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2) \sin^2 \varphi} \\ \left(\frac{r}{\mu_2}\right)^2 &= \left(\frac{p_0}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_0}{\mu_2}\right)^2 + 2\frac{p_0}{\mu_2} \cdot \frac{q_0}{\mu_2} \cos \varphi - \frac{b_0}{b_5 - b_3c_2 + b_0c_2^2} \end{aligned} \right\} (78)$$

Twee van de genoemde veranderlijken mogen dus vrij gekozen worden, of wel het is mogelijk nóg twee betrekkingen tusschen eenige dier veranderlijken te vervullen.

§ 101. Voorbeeld. *Betrekking in den driehoek* (figuur 53).

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \gamma)} = e$$

, waarin $e = \frac{a}{b}$.

Betrekking in den driehoek

tusschen α ($< 90^\circ$), γ en $\frac{a}{b} = \rho$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = \rho.$$

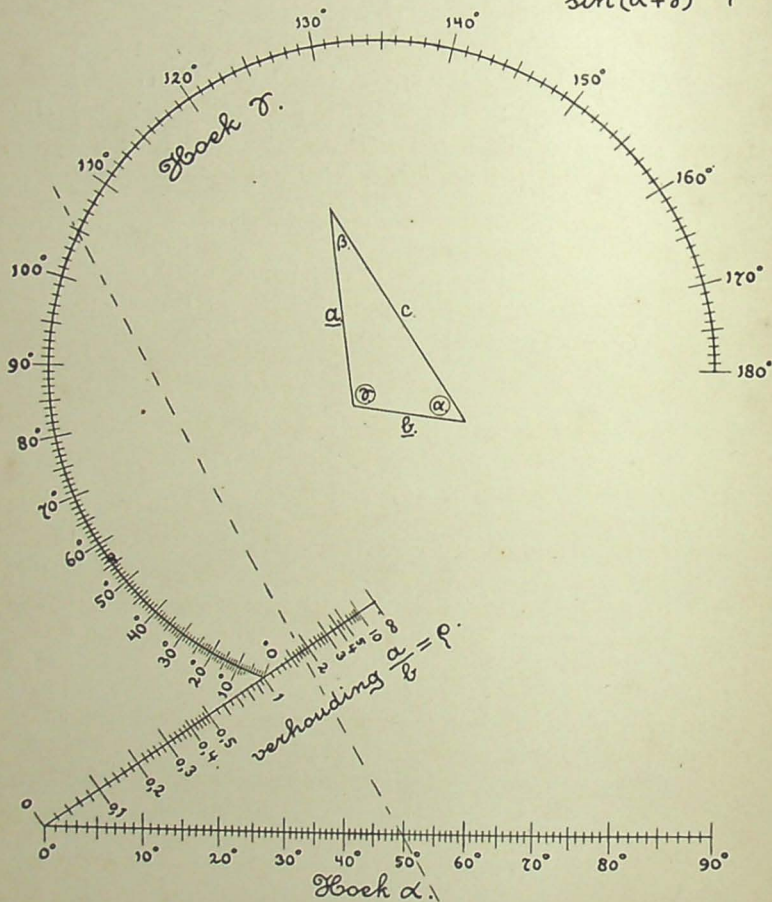


Fig. 53.

Deze betrekking kan als type (I) geschreven worden:

$$\cotg \alpha \sin \gamma + \frac{1}{\rho} = -\cos \gamma$$

, dus $f_3 = -\cos \gamma$ en $g_3 = \sin \gamma$, zoodat dus

$$f_3^2 + g_3^2 - 1 = 0$$

en er dus een betrekking (76) is, met de coëfficiënten:

$$\begin{array}{ll} b_0 = 1 & b_3 = 0 \\ b_1 = 0 & b_4 = 0 \\ b_2 = 1 & b_5 = -1 \end{array}$$

Het bereik der veranderlijken is:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } z_1, \text{ dat is voor } \alpha, \text{ van } 0^\circ \text{ tot } 90^\circ, \\ \text{" } z_2, \text{ " " " } \varrho, \text{ " } 0 \text{ " } 10, \\ \text{" } z_3, \text{ " " " } \gamma, \text{ " } 0^\circ \text{ " } 180^\circ. \end{array}$$

Zonder vervorming zouden de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ dus zeer ongunstig, voor het gestelde bereik zelfs onmogelijk zijn.

Uit de gegeven betrekking kan worden afgeleid:

- 1^o. als $\gamma = 0^\circ$ is $\varrho = 1$;
- 2^o. " $\gamma = 180^\circ$ " $\varrho = -1$;
- 3^o. " $\varrho = \infty$ " $\alpha + \gamma = 180^\circ$;
- 4^o. " $\varrho = 1$ " $2\alpha + \gamma = 180^\circ$;
- 5^o. wanneer $\alpha = 90^\circ$ is $\cos \gamma = \frac{1}{\varrho}$, waaruit volgt, dat γ dan twee waarden kan hebben, welke te zamen 360° zijn; bijgevolg raakt de afleeslijn door $\alpha = 90^\circ$ in $\gamma = 0^\circ$ en $\gamma = 180^\circ$ aan $[z_3]$;
- 6^o. wanneer $\alpha = 0^\circ$ is $\varrho = 0$ en $\sin \gamma$ onbepaald. Daar echter $\sin \gamma$ even groot is voor twee hoeken, welke te zamen 180° zijn, zal een afleeslijn door $\alpha = 0^\circ$ welke $[z_3]$ snijdt, dit steeds doen in twee schaalpunten, welker waarden te zamen 180° zijn; bijgevolg raakt de afleeslijn door $\alpha = 0^\circ$ in $\gamma = 90^\circ$ aan $[z_3]$.

Van vorengenoemde eigenschappen wordt bij de constructie een dankbaar gebruik gemaakt. Wanneer wij, aan de hand van

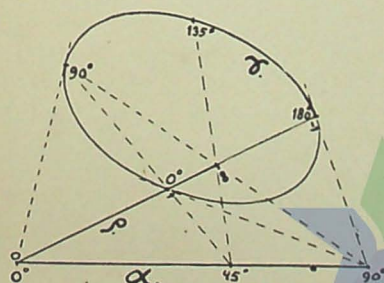


Fig. 54.

die eigenschappen, een schetsmatige figuur teekenen (figuur 54), rijst de vraag, of het niet mogelijk is, een nomogram met cirkelboogvormigen $[z_3]$ te construeeren, waarbij deze schaal recht boven $[z_1]$ ligt en een middellijn heeft ter lengte van laatstgenoemde schaal.

Uit die gewenschte ligging volgen twee voorwaarden, welke

dus, mét de formules (78), kunnen dienen om de benodigde gegevens voor de constructie te bepalen.

De verbeterde formules voor de twee rechte schalen zijn:

$$\text{voor } [z_1] \quad x = \frac{\mu_1}{\cotg \alpha + c_1}$$

$$\text{„ } [z_2] \quad y = \frac{\mu_2 \varrho}{c_2 \varrho - 1}.$$

Bijgevolg is de lengte van $[z_1]$ gelijk aan $\frac{\mu_1}{c_1}$ en dus

$$p_0 = -\frac{\mu_1}{2c_1}, \text{ terwijl } q_0 = \frac{\mu_2}{c_2 + 1}.$$

Stellen wij deze waarden voor p_0 en q_0 gelijk aan die welke uit (78) volgen, dan vinden wij:

$$c_1 = 1 \quad \text{en} \quad c_2 = -2$$

, en vervolgens met behulp van de overige formules (78):

$$m = -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{3}\sqrt{6},$$

$$\frac{p_0}{\mu_2} = \frac{1}{6}\sqrt{6}, \quad \frac{q_0}{\mu_2} = -1, \quad \frac{r}{\mu_2} = -\frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

In de oorspronkelijke teekening voor figuur 53, werd $B = \frac{\mu_1}{c_1} = \mu_1 = 20$ genomen.

$$\text{Dus was:} \quad \mu_2 = \frac{20}{m} = -10\sqrt{6}$$

$$p_0 = -10$$

$$q_0 = 10\sqrt{6}$$

$$r = 10.$$

De constructieformules voor de rechte schalen waren dus:

$$\text{voor } [z_1] \quad x = \frac{20}{\cotg \alpha + 1}$$

$$\text{„ } [z_2] \quad y = \frac{10\varrho\sqrt{6}}{2\varrho + 1}.$$

De verdeeling op den cirkelboogvormigen drager $[z_3]$, werd geconstrueerd met behulp van de reeds vermelde betrekkingen 1° t/m 6° , waarbij wij voor een afleeslijn, welke $[z_3]$ in twee waarden γ en γ' snijdt, nog de betrekking kunnen voegen:

$$2\alpha + \gamma + \gamma' = 180^\circ.$$

De onder 4° , 5° en 6° genoemde betrekkingen zijn hiervan bijzondere gevallen.

Toepassing van het nomogram.

Het nomogram figuur 53, stelt ons in staat om de overige elementen van een driehoek te bepalen, wanneer gegeven zijn:

- 1^o. een zijde met de twee aanliggende hoeken;
- 2^o. een zijde, een aanliggende en een overstaande hoek;
- 3^o. twee zijden en den ingesloten hoek;
- 4^o. twee zijden en een hoek tegenover een dezer zijden.

Wij verkeerden in het derde geval, als gegeven is:

$$a = 30,26 \text{ cm.}, \quad b = 17,12 \text{ cm.}, \quad \gamma = 104^{\circ}45'.$$

Gevraagd wordt α te bepalen.

$$\frac{a}{b} = e = 1,77. \quad \text{Uit het nomogram (stippellijn) blijkt } \alpha = 49^{\circ}40'.$$



Opgaven 22 t/m. 85 voor de constructie van nomogrammen van de 3e orde.

22. Inhoud van een cylinder $I = \frac{1}{4}\pi d^2 h$.

23. De capaciteit van twee evenwijdige draden (in lucht) is per meter lengte:

$$C = \frac{1000}{36 \ln \frac{2D}{d}}$$

, als d = de dikte van de draden (0,02 tot 0,7 cm.)

D = afstand draden h.o.h. (0,05 tot 150 cm)

en C = de capaciteit in $\mu\mu F$.

24. $R' = R(1 + 0,00393 t)$, waarin:

R = weerstand van een koperen geleiding in Ω bij een willekeurige temperatuur,

R' = weerstand na een temperatuurssteiging van t graden Celsius,

R en R' van 0 tot 5Ω , t van 0° tot 300° .

25. De inhoud van een kegelvormig gestorten berg is in m^3 :

$$I = \frac{1}{3}\pi h^3 \cotg^2 \varphi$$

, waarin h = hoogte van den berg in m. en $\tg \varphi$ = het natuurlijk talud (bijschrijven voor verschillende materiaalsoorten).

26. Tusschen de drie zijden van een rechthoekigen boldriehoek bestaat de betrekking

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

27. Het traagheidsmoment van een ringvormige doorsnede is

$$I = \frac{1}{4}\pi(R^4 - r^4).$$

28. Worpafstand $a = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$, waarin v_0 de beginsnelheid in m/sec. en α den hoek, waaronder het voorwerp wordt opgeworpen.

29. Wortijd $t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$. Beteekenis van v_0 en α als bij opgave 28.

30. Sinusregel $\lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, als $\lambda = \frac{\dot{a}}{b}$.

31. Uitzetting van een gas bij constanten druk:

$$\alpha = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}$$

, wanneer

t_1 = de oorspronkelijke temperatuur in °C.

t_2 = de eindtemperatuur in °C.

32. Afstand van het perspunt onder het midden van een rechtehoek, cirkel of ellips

, bij een rechthoek (hoogte = a): $p = \frac{a^2}{12z}$

, bij een cirkel of ellips (vertikale as = a): $p = \frac{a^2}{16z}$

In beide betrekkingen is z = de diepte van het midden van rechtehoek, cirkel of ellips, onder den waterspiegel.

33. Bij het onderzoek van rookgassen, kan de verhouding λ , van toegevoerde tot benodigde verbrandingslucht, berekend worden uit:

$$\lambda = 0,21 \frac{\frac{1}{\text{CO}_2} + 3a}{1 + 3a}$$

, waarin CO_2 het koolzuurgehalte der rookgassen is en $a = \frac{\text{H} - 1/8\text{O}}{\text{C}}$

berekend kan worden uit het **H**, **O** en **C**-gehalte van de brandstof. Bij $[a]$ verschillende brandstoffen bijschrijven.

34. De luchtweerstand **W** van een parachute, met een oppervlakte van **S** vierkante meter, welke parachute met een snelheid van **v** m/sec. daalt, is in kg.:

$$W = 2,378 Sv^2 \cdot 10^{-5}.$$

35. De excentriciteit **e** van een ellips, met halve grootte as **a** en halve kleine as **b** is: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

36. De dikte (in cm.) van een as, welke een vermogen **A** (in P.K.) moet overbrengen, kan worden berekend uit de formule:

$$d = 1,139 \sqrt[3]{\frac{A}{n}}$$

, waarin **n** het aantal omwentelingen per minuut is.

37. Wanneer op 2 m. hoogte de windsnelheid v_2 m/sec be- draagt, dan is op h m. hoogte de windsnelheid gemiddeld:

$$v_h = v_2 \sqrt[5]{1/2h} \quad (\text{Schreiber}).$$

38. Tusschen de excentriciteit e , de excentrische anomalie φ en de ware anomalie x van een planetenbaan, bestaat de betrek- king (zie schets in figuur 24):

$$\text{tg } 1/2x = \text{tg } 1/2\varphi \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

39. De waarde $\eta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$, is een maatstaf voor de „effi- ciency”, van een lekweerstand- en roostercondensator-koppeling in een versterker. η (0.03 tot 1), is de verhouding van de span- ning aan den lekweerstand tot die aan den roostercondensator en lekweerstand in serie, R is de lekweerstand in Ω (4.000—3.000.000) en x de reactantie van den condensator in Ω (1.000—10.000.000).

40. Wanneer van een schip, een gedeelte ter hoogte van d meter onder den horizon verzonken blijft, voor een waarnemer, die zich h meter boven den zeespiegel verheft, dan is de afstand in km., van den waarnemer tot het schip, rekening houdende met de gemiddelde straalbuiging:

$$L = 3,85 (\sqrt{h} + \sqrt{d}).$$

41. Bepaling van de verwarming van electriche machines, volgens de „Vorschriften und Normen des Verband Deutscher Electrotechniker (V. D. E.)”

$$t = (r - 1) (235 + T_0)$$

, waarin T_0 de temperatuur van de koude wikkeling in $^\circ\text{C}$., r de verhouding van de weerstanden van de warme en koude wikke- ling en t de temperatuurtoename in $^\circ\text{C}$ is.

42. Voor boormachines geldt:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{20,8}{0,32d + \frac{c}{k}}}$$

, waarin:

d = diameter van den boor in mm. (10 tot 80),

c = stijfheid der boormachine (0 tot 16 000),

η = rendement, k = 100 of 200. (College Prof. Dresden)

43. Is voor een voertuig de uitlooptengte l meter en de uitlooptijd t sec, dan is de rijweerstand in kg. per ton gewicht van dat voertuig;

$$w = \frac{200l}{t^2}.$$

(Seefehlner. „Electrische Zugförderung”).

44. Formule van *Biegeleisen* en *Bukovsky* voor de strooming van water door gietijzeren buizen:

$$J = \beta \frac{Q^{1,9}}{D^{4,9}}$$

, waarin β voor nieuwe buizen 9,0019

en voor gebruikte oude buizen 0,004061;

J = het verhang, Q = de afvoer in $m^3/sec.$ en D = de buismiddellijn in m.

45. De temperatuurcorrectie voor een barometerstand B is $\beta = \frac{Bt}{6250}$, waarbij t de temperatuur is in $^{\circ}C.$

46. Tusschen de declinatie δ van de zon, de breedte β van een plaats op den aardbol en den uurhoek α , begrepen tusschen op- en ondergang van de zon, bestaat de betrekking:

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

De schaal $[\alpha]$ te nummeren in aantal uren, $[\delta]$ volgens de data van het jaar, bij $[\beta]$ de voornaamste steden bijschrijven.

47. De toe te laten trekkracht in een ronde draad of staaf is:

$$P = \frac{1}{4}\pi d^2 \sigma.$$

σ van 50 tot 2000 kg/cm^2 , d van 0,01 tot 10 cm., P in kg. Bij $[\sigma]$ verschillende materialen bijschrijven.

48. De electriche weerstand in Ω per m. draadlengte is $R = \frac{4\sigma}{\pi d^2}$ waarin: σ = de soortelijke weerstand per m. draad van 1 mm.² doorsnede, d = de dikte van den draad in mm. Hierbij een dubbelschaal voor $G = \frac{1}{R}$, waarin G = het geleidingsvermogen. Bij $[\sigma]$ materialen bijschrijven.

49. Als $\gamma = \alpha \pm \beta$ is $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

50. Stootfactor $k = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ voor verschillende stoffen. $h =$ valhoogte, $h_1 =$ opspringhoogte.

51. De waterafvoer door een ronde buis of opening is:

$$Q = 1000 \frac{\pi d^2}{4} v$$

v in m/sec., d in m., Q in liter/sec., Q tevens nummers in m³/minuut, voor kleine hoeveelheden in m³/uur.

52. Betrekking $x = y^n$ voor n van -3 tot $+3$.

53. Een legering bestaande uit $x\%$ van het eene, en $(100 - x)\%$ van het andere metaal, bevat, als de atoomgewichten zich verhouden als $a : b = \lambda : 1$, $z\%$ atomen van het eene, en $(100 - z)\%$ atomen van het andere metaal, waarbij:

$$z = \frac{100x}{x + (100 - x)\lambda} \quad (\text{Pirani}).$$

54. Formule van *Kutter* en *Ganguillet*, voor den factor c , voor gewone kanalen en beken ($n = 0,025$):

$$c = \frac{63J + 0,00155}{J + (23J + 0,00155) \frac{1}{40\sqrt{R}}}$$

voor een verhang J van 25×10^{-6} tot 500×10^{-6} en een gemiddelde straal R van 0 tot 8 m. (type V toepassen).

55. In den rechthoekigen boldriehoek (met schuine zijde = c), bestaan de betrekkingen:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \quad \text{en} \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$$

56. Toestandsvergelijking voor lucht:

$$pv = 29,3 (t + 273^\circ),$$

waarin p de luchtdruk in kg/m.²,

v het volume van 1 k.g. lucht in m.³,

t de temperatuur in °C.

57. $\sin \alpha = n \sin \beta$. Breking van lichtstralen bij overgang in een doorzichtige stof met brekingsindex n .

Bij $[n]$ verschillende glassoorten, enz. schrijven.

58. De reactantie van een condensator is in Ω :

$$R = \frac{10^{12}}{2\pi nC} = \frac{531\lambda}{C}$$

, waarin n het aantal perioden per sec., C de capaciteit van den condensator in $\mu\mu\text{F}$, en λ de golflengte in meters. Dubbelschaal n , λ .

59. $C = 31,567 \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}$, is het aantal kilogramcaloriën C , noodig voor het verwarmen van 1 cm^3 droge lucht van T_1 tot T_2 (in graden absolute temperatuur).

60. Voor het maken van een mijntrechter, wijd b meter, in gewonen gemengden grond, moet een op h meter diepte aangebrachte lading brisante springstof een grootte hebben in kg.:

$$L = [1/2\sqrt{b^2 + 4h^2} - h(\sqrt{2} - 1)]^3,$$

als veranderlijken aan te nemen: L , h en $\frac{b}{h}$.

61. De afvoer van een rivier is $Q = \nu F$, waarin ν = de gemiddelde stroomsnelheid in m/sec, F = het natte profiel in m^2 , Q in m^3/sec . Uit het profiel van een bepaalde rivier, kan een nummering van $[F]$ volgens den waterstand worden afgeleid.

62. $S = \nu t$, waarin S = af te leggen weg in km., ν = marschsnelheid (voor verschillende troepenonderdeelen: infanterie, wielrijders, autocolonnes, veldartillerie, enz. Deze bijschrijven).

t = benodigde tijd.

63. Bij de strooming van gas door buisleidingen geldt:

$$\frac{h}{s} = 1655 Q^2 D^{-5}$$

, waarin: $\frac{h}{s}$ = het quotient van het drukverlies per km. in mm. waterdruk en het gewicht van het gas per m^3 in kg., Q = de hoeveelheid gas in m^3 , welke per uur door de buis stroomt en D = de wijidte van de buis in cm. (d'Ocagne).

64. Het gewicht van 1 m^3 lucht in grammen, bij h mm. barometerstand en t° Celsius is:

$$\lambda = \frac{1293 h}{760 \left(1 + \frac{t}{273}\right)}$$

65. Spanning in drijfriemen $\frac{T_1}{T_2} = e^{0,01745\sigma\alpha}$, waarin T_1 de spanning in de strakke zijde van den riem, T_2 de spanning in de losse zijde, α de booglengte, over welke riem en drijf wiel elkaar raken, σ een coëfficiënt, voor lederen riemen op gegoten ijzeren drijfwielen = 0,3. (T_1 van 10 tot 30, T_2 van 2 tot 20, α van 100° tot 300°). (Lipka).

66. Het door een drijfriem overgebrachte aantal P.K. is:

$$n = \frac{T_1 - T_2}{75} v,$$

waarin de beteekenis van T_1 en T_2 dezelfde is als in opgave 65 (in kg) en v de riemsnelheid in m/sec is.

Veranderlijken: ($T_1 - T_2$) van 2 tot 40, v van 1,5 tot 30, en n .

67. Berekening van houten schotbalken. Zie blz. 113.

68. De opwaaiing van een watervlakte is, in de windrichting, per km. lengte:

$$w = 0,04 \frac{v^2}{d}$$

, waarin v de windsnelheid in m/sec., d de waterdiepte in m . en w de opwaaiing in cm. per km. is.

69. Bij barometrische hoogtemeting, wordt een hoogteverschil h , in meters, bepaald uit de gemiddelde temperatuur t en de verhouding der barometerstanden β , met de formule:

$$h = (16000 + 64t) \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

70. Volgens *Bazin* is de stroomsnelheid in m/sec. in rivieren en kanalen met aarden wanden, wanneer α het verhang is en R de gemiddelde straal in m .:

$$v = \frac{87R\sqrt{\alpha}}{\sqrt{R + 0,85}}$$

71. Het toe te laten draagvermogen van houten heipalen, bepaald, met de z.g. Hollandsche heiformule, uit de zakking in de laatste tocht (30 slagen), bij een valhoogte van het heiblok van 2 meter, is:

$$D = \frac{2B^2}{(B + P)z}$$

, waarin het paalgewicht P , voor een paallengte l van 10 en 14 m ., te bepalen uit de formule $P = 3l^{2,3}$;

B = blokgewicht in kg. (300 tot 800);
 z = zakking in de laatste tocht in cm. (1 tot 150);
 D = toe te laten draagvermogen in tonnen (4 tot 20).

72. Het gedurig product $P = n! = n(n-1)(n-2)\dots\dots$, kan benaderd berekend worden met de formule:

$$P = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

, waarin $e = 2,71828\dots\dots$. Deze formule kan herleid worden tot

$$(2n+1) \log \frac{n}{e} + (\log 2\pi e - 2 \log P) = 0.$$

Stel $z_1 = n$, $z_2 = P$ en eveneens $z_3 = n$.

73. Scheepsweerstand in kanalen of rivieren:

$$w = \alpha v^2 \frac{n^2}{(n-1)^2}$$

, waarin w de weerstand in kg. per m^2 ondergedompelde doorsnede van het schip, v de snelheid van het schip ten opzichte van het water in m/sec. en n de verhouding van de natte doorsnede van het kanaal of de rivier tot die van het schip. α is een coëfficiënt, afhankelijk van den vorm van het schip, b.v. voor schepen met spitse voorsteven = 9, voor schepen met stompe voorsteven = 21 te stellen.

74. Overeenkomende tijdstippen in verschillende landen en steden: $T_1 + t = T_2$, waarin $T_1 =$ Amsterdamsche tijd,

$t =$ tijdsverschil met Amst. tijd, voor verschillende landen en steden en

$T_2 =$ tijd in het andere land of de andere stad.

75. Het logarithmisch decrement δ , van een electriche slingerketen, wordt bepaald uit de verhouding n van de golflengte bij resonantie en een naburige grootere golflengte, en de verhouding τ van de stroomsterkte bij resonantie en bij die naburige golflengte, met de formule (Bjerknes):

$$\delta = \frac{\pi(1-n^2)}{2V(\tau^2-1)}$$

76. Voor elk waterpasinstrument kan een nomogram geteekend worden, waaruit, wanneer de bel niet geheel inspeelt, de in rekening te brengen correctjes kunnen worden afgelezen. De voor te stellen betrekking is: $c = 100 n h a$

NOTTROT, *Leerb. der Nomografie.*

, waarin h de bekende hoekwaarde van het niveau is, a de afstand tot den afleesbaak in meters, n het aantal niveaudeelen, waarover de bel uitwijkt en c de correctie in cm.

77. Voor een dynamo is $W = 0,736 \eta N$, voor een motor $N = \frac{\eta}{0,736} W$, als W het verkregen, resp. het toegevoerde elektrische vermogen in K.W., N het toegevoerde, resp. het afgeleverde mechanisch vermogen in P.K. en η het rendement van de dynamo of den motor is.

78. Voor het trapeziumvormig kanaalprofiel, dat, voor een bepaalde oppervlakte van het profiel, de maximum afvoer toelaat, is:

$$d = \sqrt{\frac{F \sin \varphi}{2 - \cos \varphi}}$$

, waarin d de diepte in meters, F de natte doorsnede in m^2 , en φ den hoek van het talud is.

Op $[\varphi]$ een dubbelschaal teekenen voor $\frac{b}{d} = \frac{2}{\sin \varphi}$, waarin b de breedte van het kanaal op het wateroppervlak in m. is.

Nomogrammen met meer dan drie evenwijdige schalen (opgaven 79 t/m. 85).

79. Het weerstandsmoment eener rechthoekige doorsnede is $W = \frac{1}{6}bh^2$, het traagheidsmoment $I = \frac{1}{12}bh^3$.
 b van 2 tot 30, h van 5 tot 40 cm.

80. De centrifugale kracht per kg. gewicht is $C = \frac{v^2}{gr}$, het aantal omwentelingen per sec. is $n = \frac{v}{2\pi r}$, als v de omtrekssnelheid in m/sec., r de straal in m. en g de versnelling van de zwaartekracht, dat is 9,812 m/sec.² is.

81. Doorsneden van fabrieksschoorsteen:

rond van buiten en *rond* van binnen $F = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2)$

vierkant van buiten en *rond* van binnen $F = D^2 - \frac{1}{4}\pi d^2$

vierkant van buiten en *vierkant* van binnen $F = D^2 - d^2$

achtkantig van buiten en *rond* van binnen $F = 2(\sqrt{2} - 1)D^2 - \frac{1}{4}\pi d^2$

, als D de kleinste buiten- en d de kleinste binnendiameter is.

82. Voor een balk met een overspanning van l meter, een weerstandsmoment van W cm.³, een toe te laten buigspanning van T kg. per cm.², een geconcentreerde last in het midden van P ton of een gelijkmatig verdeelde last van q kg. per m., is:

voor een geconcentreerde last: $WT = 25000 Pl$,

voor een gelijkm. verdeelde last: $WT = 12,5 ql^2$.

Neem T voor grenen- en eikenhout = 100, voor vloerijzeren liggers = 1200.

[W] te nummeren met handelsmaten van houten balken en met profielnummers van gewone en breedflenzige ijzeren liggers.

83. Formules van *Dupuit-Eytelwein* voor de stroomsnelheid v in m/sec. en den afvoer Q in m³/sec., door een buisleiding met een doorsnede van D cm. en een verval J :

$$v = 2,55\sqrt{JD} \text{ en } Q = 0,0002\sqrt{JD^5}.$$

84. De straaldruk P , in de richting van een straal, welke onder een hoek α , met een stroomsnelheid van v m/sec. tegen een vlakke wand gespoten wordt, en de straaldruk N loodrecht op dien wand, zijn per dm.² doorsnede van den straal, in kg.:

$$P = 1,0194 v^2 \sin^2 \alpha.$$

$$N = 1,0194 v^2 \sin \alpha \quad (\text{Lacmann}).$$

85. Bij een eenparig versnelde beweging, is $v = at$ en $s = \frac{1}{2}at^2$, waarin a de versnelling in m/sec.², t de tijd in sec. sedert het begin der beweging, v de verkregen snelheid in m/sec. en s de afgelegde weg in m. is.

Opgaven 86 t/m 118 voor de constructie van nomogrammen van de 4^e orde.

86. Deredemachtsvergelijking

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (\mathbf{a} \text{ en } \mathbf{b} \text{ van } -10 \text{ tot } +10).$$

87. De afvoer over een volkomen overlaat met contractie, is volgens *Francis*: $Q = 1,84 (B - 0,2 H)H^{3/2}$, waarin B de breedte in m. van den overlaat, H de hoogte in m. van het bovenwater boven de kruin van den overlaat en Q den afvoer in m³/sec. is.

88. De major *Hartl* heeft voor den coëfficiënt van straalbuiging μ de, — ook voor ons land geldige —, formule

$$2\mu = 0,1041 + 0,0840 b^2$$

afgeleid, waarin b den tijd voor of na den middag voorstelt, uitgedrukt in het halve tijdsverloop tusschen zonsopgang en zons-
ondergang. Met behulp van een tabel voor de tijdstippen daarvan, kan een nomogram geteekend worden voor de betrekking tusschen datum, tijd van den dag en μ .

Neem voor den tijd van den dag een regelmatige schaal, voor b eveneens een regelmatige schaal daaraan evenwijdig (later te nummeren volgens μ); de schaal voor den datum wordt dan (wegens de tijdsvereffening tusschen middelbaren en waren tijd) een licht-S-vormig gebogen schaal.

89. De zelfinductie L in cm., van een rechten draad lang l en dik d cm., is:

$$L = 2l \left(\ln \frac{4l}{d} - 1 \right).$$

90. De verlichting L in Lux van een horizontaal vlak, in horizontale richting R meter en in verticale richting Z meter verwijderd van een lamp van 100 H.K., is:

$$L = \frac{100 Z}{(R^2 + Z^2)^{3/2}}. \quad (\text{Pirani}).$$

91. Wet der overeenkomstige toestanden:

$$\left(\varepsilon + \frac{3}{\nu^2} \right) (3\nu - 1) = 8\omega$$

, waarin ν , ε en ω onderscheidenlijk het gereduceerde volume, de gereduceerde druk en de gereduceerde absolute temperatuur beduiden, d.w.z. percentages van het kritische volume, de kritische druk en de kritische absolute temperatuur.

92. Empirische formule van *Wex*, voor den afvoer over grondstuwten (onvolkomen overlaten):

$$Q = 2,35H\sqrt{H_1} - 0,58\sqrt{H_1^3}$$

, waarin Q in m³. per sec. per m. breedte van de stuw, H de hoogte in m. van het bovenwater boven de stuw en H_1 het hoogteverschil in m. van boven- en benedenwater is. (Lacmann).

93. Het totaal aantal voorwerpen in een pyramidevormigen stapel, met x eenheden langs de korte zijde van het rechthoekig grondvlak en z eenheden langs de kam van den stapel, is:

$$n = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+3z-2).$$

94. Wordt met een tachymeter, tusschen de draden op een baak een verschil v afgelezen, en staat de kijker onder een hoek α met den horizon, dan is het hoogteverschil tusschen de kijkeras en het afleespunt van den middendraad op de baak:

$$H = \frac{1}{2}Av \sin 2\alpha + B \sin \alpha$$

, waarin A en B constanten van den tachymeter zijn.

95. Het toe te laten draagvermogen van houten heipalen, bepaald uit de zakking in de laatste tocht slagen (30 slagen), bij een valhoogte van het heiblok van 2 meter, is volgens *Eytelwein*:

$$D = \frac{2B^2}{(B + P)z} + 0,0003 (B + P)$$

, daarbij het paalgewicht P te bepalen uit $P = 3l^{2.3}$, voor een paallengte l van 10 en 14 m.; B is het blokgewicht in kg. (300 tot 800), z de zakking van de heipaal in de laatste tocht in cm. (1 tot 150) en D het toe te laten draagvermogen in tonnen (ongeveer 4 tot 20).

96. Voor de zichtbaarheid van vuurtorenlichten geldt volgens *Allard*

$$d^2 = 100 L a^d$$

, waarin L de lichtsterkte van het kustlicht in kaarsen, d de afstand tot welke het licht zichtbaar is (in km.) en a een coëfficiënt afhankelijk van de helderheid der atmosfeer (0 tot 1) is.

(d'Ocagne, Soreau).

97. Formule van *Gauss* uit de foutentheorie:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

, waarin x van 0 tot 1,5, y van 0,05 tot 0,5, en e het grondtal van de nat. logarithmen is. (Le Heux).

98. Formule van *Mary* voor onvolkomen overlaten (zie figuur 55)

$$Q = 0,8h_2 \sqrt{2g \left(h_1 + \frac{v_0^2}{2g} \right) - h_2}$$

Q in $m^3/sec.$ per m. breedte van den overlaat, h_1 en h_2 in m., v_0 in m/sec. Neem

schalen $[Q]$, $[h_2]$ en $\left[h_1 + \frac{v_0^2}{2g} \right]$, de laatste tevens als dubbelschaal

voor $h = \frac{v^2}{2g}$.



Fig. 55.

99. Bij het meten met den sextant van den elevatiehoek van een richtlijn naar een nabijgelegen punt P, met behulp van een kunstmatigen horizon, is:

$$\gamma = \frac{1}{2}\alpha - m \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$$

, waarin γ de gezochte elevatiehoek is, α de met den sextant opgemeten hoek en m de verhouding tusschen de hoogte van den sextant boven den kunstmatigen horizon en den afstand van deze laatste tot het punt P.

Nomogrammen van de 4^e orde met cirkelboogvormige [z₃].
(Opgaven 100 t/m 118).

100. Vierkantsvergelijking

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (\mathbf{a} \text{ en } \mathbf{b} \text{ van } -10 \text{ tot } +10).$$

101. Eenparig vertraagde beweging

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

, waarin v_0 de beginsnelheid in m/sec., t de tijd sedert het begin van de beweging in sec. en s de afgelegde weg in m. is, terwijl

$$g = 9,812 \text{ m/sec}^2.$$

102. Wordt bij een elektrische machine, na een zekeren tijd de temperatuurstoeging T_1 opgemeten, en na een tweemaal zoo langen tijd de temperatuurstoeging T_2 , beiden ten opzichte van dezelfde begintemperatuur, dan is de stoeging T_∞ tot de stationaire eindtemperatuur:

$$T_\infty = \frac{T_1^2}{2T_1 - T_2}. \quad (\text{Schwerdt}).$$

103. De lengte L van een kabel, met doorhang d en spanwijdte l , alles in meters, is benaderd:

$$L = \frac{l^2 + \frac{8}{3}d^2}{l}$$

1 van 20 tot 100, d van 0,1 tot 2.

104. Voor de vulling van een sluisolk (zie figuur 56) is:

$$\tau = \frac{H_1 + 2H_2}{\sqrt{H_2}}$$

waarbij $\tau = mt$, als t de ver tijd is en m een coëfficiënt, afhankelijk van de grootte van de kolk en van de schuifopening.

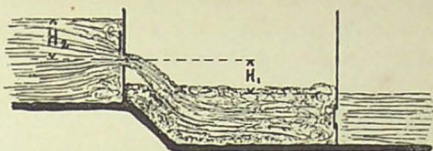


Fig. 56.

105. Bij axonometrische projectie (zie figuur 57), is de verhouding der lengte-eenheden in de as-richtingen, als $m : n : 1$. Tusschen den hoek φ , welke een asrichting maakt met het verlengde van de Z-as, de lengte-eenheid m in die asrichting en de lengte-eenheid n in de derde asrichting, bestaat de betrekking:

$$2m^2 \cos 2\varphi - n^4 + 1 + m^4 = 0.$$

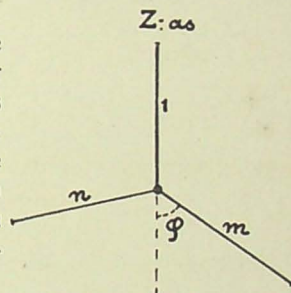


Fig. 57.

106. Bij planconvexe lenzen met een middellijn m en een dikte d , is de kromtestraal:

$$R = \frac{m^2 + 4d^2}{8d}.$$

107. De betrekking tusschen de excentrische anomalie φ en den hoek ψ , (P'-Z-Perih. in de schets bij figuur 24), is:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - e}.$$

108. Berekening van de hoeken van een driehoek uit de drie zijden, met behulp van den cosinusregel. Stel: $\frac{a}{c} = a_1$ en $\frac{b}{c} = b_1$, dan is:

$$\cos \alpha = \frac{b_1^2 - a_1^2 + 1}{2b_1}.$$

109. Voor rondhouten stutten is volgens Navier en Schwarz-Rankine:

$$P = \frac{15\pi d^4}{d^2 + 36,8 l^2}$$

, waarin P = de toe te laten belasting in kg,
 d = de paaldikte in cm.,
 l = de paallengte in m.

110. Het volume van het ballastbed op een spoorweg, bij een dikte van d m., taluds 2 : 3 en een bovenbreedte van b m., is per m. lengte in m^3 : $V = bd + 1,5d^2$. (d'Ocagne).

111. Tusschen den uurhoek U , de declinatie Φ en den afstand tot het Zenith ω van een ster, is voor een plaats met de breedte φ :
 $\cos \omega = \sin \varphi \sin \Phi + \cos \varphi \cos \Phi \cos U$.
 Neem voor φ de breedte van uwe woonplaats. [U] in uren te nummeren.

112. De te gebruiken schootshoek φ , wordt afgeleid uit den schootstafelhoek α en den terreinhoek ε met

$$(1 + \cos 2\varphi) \operatorname{tg} \varepsilon = \sin 2\varphi - \sin 2\alpha.$$

113. Loonberekening volgens het Rowan-stelsel:

$$b = (2t - w) \frac{w}{t}$$

, waarin t het getaxeerde aantal uren voor een bepaalden arbeid benodigd, w het aantal uren, waarin de arbeider dat werk volbracht heeft en b het aantal uren, waarover loon wordt betaald.

114. Voor de tijdsbepaling uit de culminatie van een ster, moet een correctie J berekend worden

$$J = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

, waarin:

φ de geografische breedte van de plaats van waarneming en δ de declinatie van de ster is. (Wenner).

115. Evenzoo moet berekend worden een correctie K uit:

$$K = \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$$

, waarin φ en δ dezelfde beteekenis hebben als in de opgave 114. (Wenner).

116. Het uitzetten op het terrein van een cirkelboog met grooten straal R , kan plaats hebben, door achtereenvolgens punten daarvan te bepalen met behulp van hunne coördinaten x en y , (zie figuur 58). De ordinaten y worden daarbij berekend uit de formule:

$$y = R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

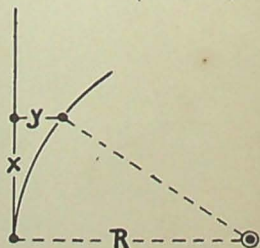


Fig. 58.

117. Wordt tusschen de draden van

een tachymeter op een baak een hoogteverschil v afgelezen, en is de kijker gericht volgens een hoek α met den horizon, dan is de horizontale afstand tot de baak:

$$L = Av \cos^2 \alpha + B \cos \alpha$$

, waarin A en B constanten van den tachymeter zijn.

118. Bij een trigonometrische hoogtemeting is, rekening houdende met de voor Nederland geldende gemiddelde aardkromming en straalbuiging, het hoogteverschil h tusschen twee punten (in meters):

$$h = a \operatorname{tg} e + 6,737 \times 10^{-8} a^2$$

, waarin a de horizontale afstand in meters tusschen de twee punten is en e de elevatiehoek, onder welke het eene punt, van het andere uit, wordt gezien.



B.

NOMOGRAMMEN OP EEN GEBOGEN SCHALENSTEL.

HOOFDSTUK 16.

Algemeene inleiding.

§ 102. Nomogrammen op een gebogen schalenstel hebben in het algemeen twee gebogen schalen, te zamen het schalenstel vormend, waarop de betrekking door een derde, kromme of rechte schaal, wordt voorgesteld.

Voor de afleiding van de functievergelijkingen dezer nomogrammen en voor hunne constructie, maken we echter meestal weer gebruik van een recht **hulpschalenstel** $[\varphi, \psi]$, waarvoor:

$$x = \mu' \varphi \quad \text{en} \quad y = \mu' \psi.$$

In wetenschap en techniek zijn de betrekkingen, welke alleen op een gebogen schalenstel voorgesteld kunnen worden, gering in aantal, vergeleken bij de op een recht schalenstel voor te stellen betrekkingen. Echter kunnen van deze laatste de typen van de 3^e orde, behalve op een recht schalenstel, eveneens op bepaalde gebogen schalenstellen worden voorgesteld, hetgeen om verschillende redenen de voorkeur kan verdienen.

§ 103. Een gebogen schaaldrager, kan door een rechte afleeslijn in meerdere punten gesneden worden, en dus is het bij het gebogen schalenstel mogelijk, dat de twee gebogen schalen één gemeenschappelijke drager hebben.

Deze nomogrammen zijn voornamelijk van belang, wanneer hun gemeenschappelijke drager een kegelsnede en dan bij voorkeur een cirkel is. Is daarbij de derde schaal recht, dan heeft men een vorm van nomogram, waartoe elk nomogram met drie rechte schalen te transformeeren is.

Het is bij een gebogen schalenstel zelfs mogelijk, voor bepaalde betrekkingen den vorm van den gemeenschappelijke drager zoo

te kiezen, dat ook de derde schaal op dien drager gelegen is en dus het geheele nomogram maar één drager heeft. Daartoe moet deze door elke rechte afleeslijn in drie schaalpunten worden gesneden en bijgevolg minstens een kubische kromme wezen.

§ 104. In de volgende hoofdstukken zullen dus achtereenvolgens worden besproken:

1^o. Nomogrammen op een gebogen schalenstel, met afzonderlijke dragers,

- a. de derde schaal is een kromme schaal,
- b. de derde schaal is een rechte schaal;

2^o. Nomogrammen op een gebogen schalenstel, met een gemeenschappelijken drager van willekeurigen vorm;

3^o. Kegelsnede-nomogrammen,

- a. de derde schaal is een kromme schaal,
- b. de derde schaal is een rechte schaal

4^o. Kubische nomogrammen.



HOOFDSTUK 17.

Nomogrammen op een gebogen schalenstel met afzonderlijke dragers.

Type VII: De derde schaal is een kromme schaal.

§ 105. Afleiding van de functievergelijking.

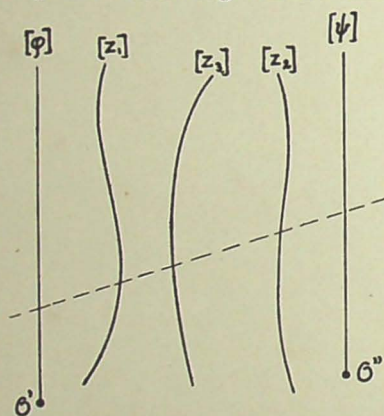


Fig. 59.

Op een evenwijdig schalenstel $[\varphi, \psi]$ met de functieschalen:

$$x = \mu' \varphi \quad \text{en} \quad y = \mu'' \psi$$

(figuur 59), worden de drie betrekkingen van type I:

$$\left. \begin{aligned} \varphi g_1 + \psi &= f_1 \\ \varphi g_2 + \psi &= f_2 \\ \varphi g_3 + \psi &= f_3 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

elk door een kromme schaal voorgesteld.

Elimineeren wij de functies φ en ψ uit (79), — en dus de twee rechte hulpschalen uit figuur 59 —, dan vinden wij, als *functievergelijking voor het*

nomogram met drie willekeurig gevormde schalen,

$$\boxed{\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3}} \quad (VII)$$

Alle voorgaande en nog volgende functievergelijkingen voor nomogrammen met drie schalen, zijn dus uit (VII) af te leiden

Stellen wij daarin b.v.:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= F_1 & f_2 &= F_2 & f_3 &= \frac{F_3}{G_3 + 1} \\ g_1 &= 1 & g_2 &= 0 & g_3 &= \frac{G_3}{G_3 + 1} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

, dan wordt de functievergelijking:

$$F_1 G_3 + F_2 = F_3,$$

van type I verkregen.

Een andere schrijfwijze voor (VII) is:

$$f_1(g_2 - g_3) + f_2(g_3 - g_1) + f_3(g_1 - g_2) = 0. \quad (81)$$

N.B. Het drietal betrekkingen van (79), kan als volgt in den vorm van een determinant worden weergegeven:

$$\begin{array}{ccc|c} \varphi & \psi & C & \\ \hline g_1 & 1 & f_1 & \\ g_2 & 1 & f_2 & \\ g_3 & 1 & f_3 & \end{array} = 0 \quad (82)$$

, waarbij dus de functies der veranderlijken z_1 , z_2 en z_3 , beschouwd worden als coëfficiënten van φ , ψ of van de eenheid (constante).

§ 106. **Constructieformules.** De constructieformules voor het nomogram met drie kromme schalen, zijn van denzelfden vorm als voor $[z_3]$ bij type I, namelijk:

$$\begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \\ \text{„ } [z_2] \\ \text{„ } [z_3] \end{array} \left. \begin{array}{l} p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' g_1 + \mu'} \\ p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' g_2 + \mu'} \\ p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' g_3 + \mu'} \end{array} \right\} \begin{array}{l} q = \frac{\mu' \mu'' f_1}{\mu'' g_1 + \mu'} \\ q = \frac{\mu' \mu'' f_2}{\mu'' g_2 + \mu'} \\ q = \frac{\mu' \mu'' f_3}{\mu'' g_3 + \mu'} \end{array} \quad (83)$$

Hierin zijn μ' en μ'' de moduli en is δ de afstand der oorsprongen O' en O'' van de hulpschalen $[\varphi]$ en $[\psi]$. Deze grootheden kunnen naar verkiezing worden aangenomen. Worden de hulpschalen geteekend, dan kunnen de drie kromme schalen ook volgens de bij type I behandelde projectiemethoden, worden geconstrueerd.

§ 107. Vereenvoudigde constructieformules.

Daar de hulpschaal $[\psi]$ geen werkelijke schaal van het nomogram is, kan deze desgewenscht op een oneindigen afstand van $[\varphi]$ geplaatst worden.

Stellen wij behalve δ , ook $\mu'' = \infty$, maar hun quotient gelijk aan een eindige waarde n , dan worden de **constructieformules** voor de kromme schalen:

$$\begin{array}{l} \text{voor } [z_1] \\ \text{„ } [z_2] \\ \text{„ } [z_3] \end{array} \left. \begin{array}{l} p = \mu' \frac{n}{g_1} \\ p = \mu' \frac{n}{g_2} \\ p = \mu' \frac{n}{g_3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} q = \mu' \frac{f_1}{g_1} \\ q = \mu' \frac{f_2}{g_2} \\ q = \mu' \frac{f_3}{g_3} \end{array} \quad (84)$$

In vele gevallen is het gebruik van deze vereenvoudigde constructieformules mogelijk.

Uit (84) volgt:

$$\frac{q}{p} = \frac{f_1}{n} \quad (85)$$

, enz.

, met behulp van welke formules, de schalen ten deele ook door projectie kunnen worden geconstrueerd.

Als $g_1 = F_1(f_1)$, enz. dan worden de vergelijkingen van de dragers, voor $[z_1]$

$$p = \frac{\mu' n}{F_1\left(n \frac{q}{p}\right)} \quad (86)$$

, enz.

§ 108. Wanneer in plaats van een *evenwijdig* hulpschalenstel, een *snijdend* gebezigd zou zijn, dan was als functievergelijking een vergelijking gevonden, welke uit (VII) verkregen wordt; door de omgekeerden van alle functies te nemen. Voor de constructieformules hadden wij dan dadelijk soortgelijke formules als (84), kunnen afleiden.

Betrekkingen, welke slechts in den vorm van het algemeene type VII zijn voor te stellen, komen in de techniek uiterst zelden voor. Mij is geen enkel voorbeeld van een zoodanige betrekking bekend. Het zal bovendien meestal wel zeer lastig zijn, de gegeven vergelijking tot den vorm (VII) te herleiden. (Zie Deel IV).



Type VIII. De derde schaal is een rechte schaal.

§ 109. Nemen wij deze rechte schaal op de as $[\varphi]$, dan wordt (79):

$$\left. \begin{aligned} \varphi g_1 + \psi &= f_1 \\ \varphi g_2 + \psi &= f_2 \\ \varphi &= f_3 \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

, dus is de **functievergelijking** voor nomogrammen met minstens één rechte schaal:

$$\boxed{\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = f_3} \quad (VIII)$$

Hieruit is bij voorbeeld weer type (I) af te leiden, door te stellen:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= F_3 & f_2 &= F_2 & f_3 &= F_1 \\ g_1 &= G_3 & g_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

N.B. In determinantvorm wordt het stel vergelijkingen (87) geschreven:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & C \\ g_1 & 1 & f_1 \\ g_2 & 1 & f_2 \\ 1 & 0 & f_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (89)$$

§ 110. De **constructieformules** voor dit nomogramtype zijn:

$$\left. \begin{aligned} \text{voor } [z_1] \quad \mu &= \frac{\mu' \delta}{\mu'' g_1 + \mu'} & q &= \frac{\mu' \mu'' f_1}{\mu'' g_1 + \mu'} \\ \text{,, } [z_2] \quad \mu &= \frac{\mu' \delta}{\mu'' g_2 + \mu'} & q &= \frac{\mu' \mu'' f_2}{\mu'' g_2 + \mu'} \\ \text{,, } [z_3] & & x &= \mu' f_3 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

, waarin weer μ' , μ'' en δ naar verkiezing zijn aan te nemen. $[z_1]$ en $[z_2]$ kunnen ook weer, met behulp van de bij type I besproken projectiemethoden, gevonden worden.

§ 111. **Vereenvoudigde constructieformules.** Overeenkomstig (84) zijn deze formules voor het type VIII:

$$\left. \begin{aligned} \text{voor } [z_1] \quad p &= \mu' \frac{n}{g_1} & q &= \mu' \frac{f_1}{g_1} \\ \text{,, } [z_2] \quad p &= \mu' \frac{n}{g_2} & q &= \mu' \frac{f_2}{g_2} \\ \text{,, } [z_3] & & x &= \mu' f_3 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

n en μ' zijn hierbij wederom naar keuze te bepalen. Voor de dragers $[z_1]$ en $[z_2]$ gelden weer de vergelijkingen (86).

Zoo noodig kan, voor het verkrijgen van een gunstiger nomogram, de vergelijking van type (VIII) herleid worden tot een nieuwe vergelijking van dat type

$$\frac{(af_1 + bg_1) - (af_2 + bg_2)}{(cf_1 + dg_1) - (cf_2 + dg_2)} = \frac{af_3 + b}{cf_3 + d} \quad (92)$$

Betrekkingen van het type VIII komen eveneens vrij zelden voor.



HOOFDSTUK 18.

Nomogrammen op een gebogen schalenstel, met een gemeenschappelijken drager van willekeurigen vorm.

Type VIIa: De derde schaal is een kromme schaal.

Type VIIIa: De derde schaal is een rechte schaal.

§ 112. Bij de nomogramtypen VII en VIII worden, overeenkomstig formule (21), de vergelijkingen van de dragers $[z_1]$ en $[z_2]$ onderscheidenlijk:

$$p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' F_1 \left(\frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu''} \right) + \mu'}$$

en

$$p = \frac{\mu' \delta}{\mu'' F_2 \left(\frac{q}{p} \cdot \frac{\delta}{\mu''} \right) + \mu'}$$

of bij gebruik van de vereenvoudigde formules:

$$p = \frac{\mu' n}{F_1 \left(n \frac{q}{p} \right)}$$

en

$$p = \frac{\mu' n}{F_2 \left(n \frac{q}{p} \right)}$$

, waarin de functies F_1 en F_2 in beide gevallen dezelfde zijn als in

$$g_1 = F_1(f_1) \quad \text{en} \quad g_2 = F_2(f_2).$$

Dus hebben $[z_1]$ en $[z_2]$ een gemeenschappelijken drager, wanneer die twee functies van denzelfden vorm zijn, dus wanneer

$$g_1 = F(f_1) \quad \text{en} \quad g_2 = F(f_2). \quad (93)$$

Substitueeren wij deze uitdrukkingen voor g_1 en g_2 in (VII) en (VIII), dan verkrijgen wij de **functievergelijkingen**:

$$\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = \frac{f_2 - f_3}{F(f_2) - g_3} \quad (VIIa)$$

, indien de derde schaal een kromme schaal is, en

NOTTROT, *Leerb. der Nomografie*.

$$\frac{f_1 - f_2}{F(f_1) - F(f_2)} = f_3 \quad (\text{VIIIa})$$

, wanneer de derde schaal een rechte schaal is.

Het is mogelijk, dat g_1 niet expliciet in f_1 is uit te drukken, en dus evenmin g_2 in f_2 .

Een betrekking is echter ook van het type VIIa of VIIIa, wanneer in

$$\Phi(f_1, g_1) = 0 \quad \text{en} \quad \Phi(f_2, g_2) = 0 \quad (94)$$

Φ eenzelfde functie is.

§ 113. Aan de functievergelijkingen (VIIa) en (VIIIa) wordt o.a. voldaan door $f_1 = f_2$, omdat dan het eerste lid gelijk aan $\frac{0}{0}$ en dus onbepaald wordt. Dit beteekent echter niets anders, dan dat de twee schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ op hun gemeenschappelijken drager een dubbelschaal vormen voor $f_1 = f_2$. Dit zal somtijds een practisch bruikbare dubbelschaal wezen, meestal is echter het bereik van de twee veranderlijken zoo beperkt, dat de twee schalen niet of slechts ten deele, op hetzelfde gedeelte van den drager zullen liggen.

Type (III) kan met behulp van goniometrische functies tot (VIIIa) worden herleid:

$$\text{Als n.l.} \quad f_1 + f_2 = f_3$$

$$\text{dan is} \quad \frac{\cos f_1 - \cos f_2}{\sin f_1 - \sin f_2} = -\text{tg } \frac{1}{2} f_3 \quad (95)$$

De gemeenschappelijke drager van $[z_1]$ en $[z_2]$ is in dit geval een kegelsnede.

De **constructieformules** voor VIIa en VIIIa zijn dezelfde als voor VII en VIII.

Betekkingen van het type VIIIa komen vrij veelvuldig voor, waarbij de schalen voor $[z_1]$ en $[z_2]$ meestal zelfs geheel samenvallen. Daar F dan in het algemeen een machtsfunctie is, zullen met voordeel de *vereenvoudigde constructieformules* kunnen worden gebezigd.

Tot het type VIIIa behoort ook de functievergelijking:

$$f_1^2 + f_1 f_2 + f_2^2 = f_3 \quad (96)$$

1) Want

$$-\text{tg } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$$

, daar het eerste lid geschreven kan worden als $\frac{f_1^3 - f_2^3}{f_1 - f_2}$.

Op dezelfde wijze kan type III geschreven worden als $\frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1 - f_2} = f_3$.

§ 114. Voorbeeld. *Stroomsnelheid bij vrije uitstrooming door een rechthoekige opening (fig. 60).*

Stroomsnelheid bij vrije uitstrooming door een rechthoekige opening
(of overlaat - als $h_1 = 0$).

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot \frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1}$$

$$g = 9,81 \text{ m/sec}^2$$

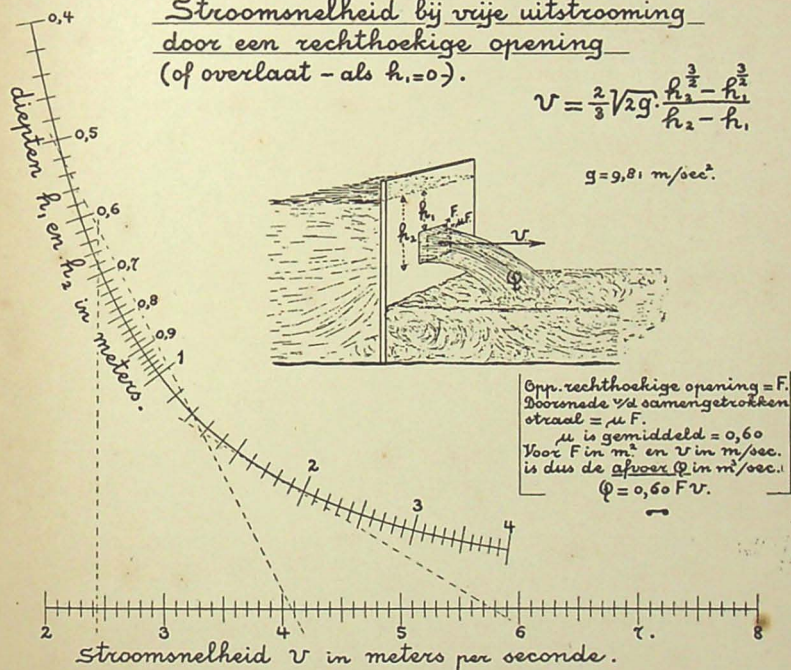


Fig. 60.

De voor te stellen betrekking is:

$$v = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \frac{h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}}{h_2 - h_1}$$

, waarin h_1 en h_2 de afstanden in m zijn van boven- en onderrand van de opening tot den waterspiegel bovenstrooms, (bereik voor beiden van 0,4 tot 4), v de gemiddelde stroomsnelheid in m/sec. in het nauwste gedeelte van den straal (bereik van 2 tot 8) en g de versnelling van de zwaartekracht = $9,81 \text{ m/sec}^2$ is.

De vereenvoudigde constructieformules zijn hier,

$$\text{voor } [z_1] \text{ en } [z_2]: \quad p = \mu' \frac{n}{h} \quad q = \mu' \sqrt{Vh}$$

$$\text{, voor } [z_3]: \quad x = \mu' \frac{v}{\frac{2}{3}\sqrt{2g}} = \mu' \frac{v}{2,953}$$

In de oorspronkelijke tekening voor figuur 60 was $L \approx 24$. Wij namen $[z_3]$ in deze richting, de constructieformule voor de regelmatige $[v]$ moet dan $x = 4v$ wezen, zoodat

$$\mu' = 4 \times 2,953 = 11,812.$$

De richting van de oorspronglijn werd loodrecht op de hulpschalen genomen.

Voorts was $B \approx 20$, dus was voor $h = 0,4$,

$$p = 2,5 n\mu' \approx 20.$$

Genomen werd $n\mu' = 8$ en dus waren de constructieformules:

$$\text{voor } [z_1] \text{ en } [z_2]: \quad p = \frac{8}{h} \quad q = 11,812 \sqrt{Vh}$$

$$\text{„ } [z_3]: \quad x = 4v.$$

Toepassing van het nomogram.

Een schutkolk wordt uit het bovenpand gevuld door het openen van schuiven in de sluisdeuren. De, bij het ophalen van een schuif, vrijkomende rechthoekige opening, is 0,5 m. breed en reikt van 0,52 tot 1,2 m. onder het bovenwater. Uit het nomogram kan worden afgelezen, (middelste stippellijn) dat, — zoolang het water in de kolk beneden de opening blijft —, de gemiddelde stroomsnelheid daarin 4.07 m/sec. en dus de afvoer ongeveer $0,6 \times 0,5 \times 0,68 \times 4,07 = 8,3 \text{ m}^3/\text{sec.}$ zal bedragen

Wanneer $h_1 = h_2$, dan is de afleeslijn een raaklijn aan de gebogen schaal en geeft het nomogram de, bij een zekere stroomsnelheid behorende, drukhoogte aan (volgens de formule $v = \sqrt{2gh}$). Zoo is de drukhoogte, behorende bij een stroomsnelheid van 5,76 m/sec., ongeveer 1,7 m. (rechtsche stippellijn).

Is ten slotte $h_1 = 0$, welk schaalpunt in het oneindige op den oorspronglijn van het hulpschalenstel ligt, (want voor $h_1 = 0$, is $p = \delta = \infty$ en $q = 0$), dan staat dus de afleeslijn loodrecht op $[v]$ en is $v = \frac{2}{3}\sqrt{2gh_2}$, hetgeen een benaderde formule voor de stroomsnelheid over een overlaat is. Zoo is de snelheid van den stroom over een schotbalkwand, waarvan de bovenkant zich 0,68 m. beneden den bovenwaterstand bevindt, ongeveer 2,4 m/sec. (linksche stippellijn).

HOOFDSTUK 19.

Kegelsnede-nomogrammen. Type IX.

Functievergelijking.

§ 115. Wanneer er in VIIa tusschen de functies f en g , zoowel van de veranderlijke z_1 als van z_2 , een betrekking van den 2den graad is, dan zal, zooals bij type Ia werd aangetoond, de gemeenschappelijke drager van het schalenstel een kegelsnede zijn.

Nomogrammen, waarbij dit het geval is, worden daarom **kegelsnede-nomogrammen** genoemd (Fransch: Abaques Coniques),

Hunne functievergelijking, — waarvan wij zoo dadelijk, met behulp van eenige eigenschappen uit de Projectieve Meetkunde, de algemeene geldigheid zullen aantoonen —, wordt op eenvoudige wijze uit VII verkregen, door daarin te substitueeren:

$$g_1 = f_1^2 \quad \text{en} \quad g_2 = f_2^2$$

, waaruit volgt:

$$(f_1 - f_2)f_1f_2 - (f_1^2 - f_2^2)f_3 + (f_1 - f_2)g_3 = 0,$$

of, na deeling door $(f_1 - f_2)$,

$$f_1f_2 - (f_1 + f_2)f_3 + g_3 = 0 \quad (IX)$$

, waarbij dan in het algemeen de derde schaal krom is.

Is er tusschen f_3 en g_3 een lineaire verwantschap, dus is

$$g_3 = Af_3 + B$$

, dan is de derde schaal recht.

Projectieve vorming van het kegelsnede-nomogram.

§ 116. Afleiding van functievergelijking en constructieformules.

Wanneer (figuur 61) de schaalpunten van twee, willekeurig gelegen, metrische schalen $[x']$ en $[x'']$, onderscheidenlijk verbonden worden met twee, eveneens willekeurig gekozen, toppunten T' en T'' , dan zijn de beide aldus verkregen waaiers onderling projectief.

Elk punt P van een transversaal I , is dus tevens een punt, zowel van een straal (genummerd x') uit T' , als van een straal (genummerd x'') uit T'' .

De beide waaiers snijden dus den transversaal volgens twee, —

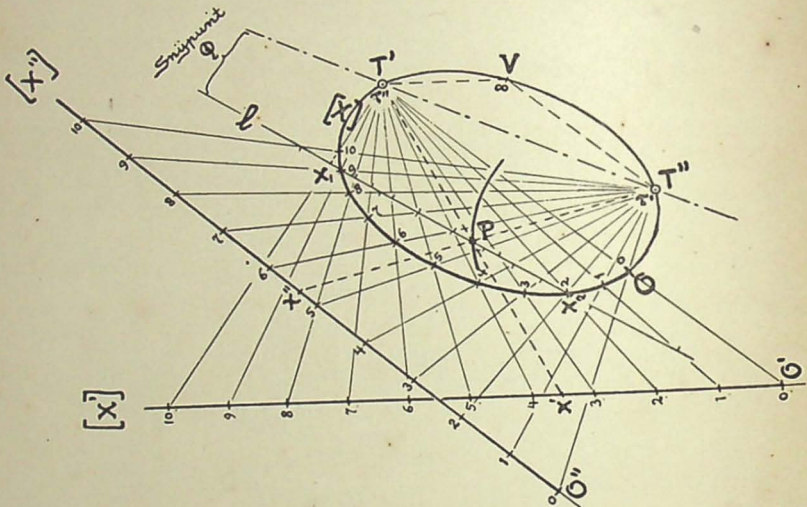


Fig. 61.

onderling projectieve —, puntenreeksen; deze vormen te zamen een dubbelschaal voor de zogenaamde **bilineaire betrekking**

$$\alpha x'x'' + \beta x' + \gamma x'' + \delta = 0 \quad (97)$$

, waarin α , β , γ en δ coëfficiënten zijn met onderling constante verhoudingen.

Voor welke punten van een transversaal zijn de nummers van de twee stralen gelijk, dus is $x' = x''$, stel $x = x'$?

In dat geval, volgt uit (97):

$$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0 \quad (98)$$

De oplossing van deze vierkantsvergelijking, geeft voor x twee reële, — ongelijke of gelijke —, óf twee imaginaire waarden, x_1 en x_2 .

Op elke transversaal liggen dus steeds twee reële, — verschillende of samenvallende —, óf twee imaginaire punten, waarvoor $x' = x''$.

De kromme, gevormd door deze zogenaamde **dubbelpunten** van het door de waaiers gevormde net, is dus een **kegelsnede**.

Deze gaat o.a. door den **Oorsprong O**, waarvoor $x = 0$, het **Vluchtpunt V**, waarvoor $x = \infty$, en de toppunten **T'** en **T''**.

Voor deze laatste stellen wij onderscheidenlijk:

$$x = \tau' \quad \text{en} \quad x = \tau''.$$

De genummerde dubbelpunten vormen op de kegelsnede een schaal $[x]$. Daar echter elke snijlijn door twee schaalpunten x_1 en x_2 gaat, kan die schaal ook beschouwd worden als een schalenstel, gevormd uit de twee gelijke, samenvallende schalen $[x_1]$ en $[x_2]$.

Volgens deze zienswijze, denken wij ons dan het punt **P** als een schaalpunt van de derde schaal, en de lijn **l** als een door **P** gaande afleeslijn. In verband daarmee geven wij, van nu af, aan de nummers van de stralen door **P**, een indice 3.

Dan is dus volgens (97):

$$\alpha x_3' x_3'' + \beta x_3' + \gamma x_3'' + \delta = 0 \quad (99)$$

Nu is echter voor het snijpunt **Q** van **T'T''** met **l**:

$$x_3' = \tau' \quad \text{en} \quad x_3'' = \tau''$$

en dus:

$$\alpha \tau' \tau'' + \beta \tau' + \gamma \tau'' + \delta = 0 \quad (100)$$

Voorts volgt uit de vierkantsvergelijking (98), met de bekende eigenschappen van som en product der wortels:

$$\beta + \gamma = -a(x_1 + x_2) \quad (101)$$

en

$$\delta = a x_1 x_2 \quad (102)$$

Uit de laatste 4 vergelijkingen (99 t/m. 102), kunnen wij α , β , γ en δ elimineeren en verkrijgen dan den vorm:

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) \frac{\tau' x_3' - \tau'' x_3''}{(x_3' - x_3'') - (\tau' - \tau'')} + \frac{\tau' \tau'' (x_3' - x_3'') - (\tau' - \tau'') x_3' x_3''}{(x_3' - x_3'') - (\tau' - \tau'')} = 0 \quad (103)$$

De breuken in deze formule zijn uitsluitend functies van x_3' en x_3'' , hunne waarde is dus alleen afhankelijk van de ligging van **P**.

Teekenen we (figuur 62) op $[x']$ de schalen:

$$x_1' = f_1, \quad x_2' = f_2 \quad \text{en} \quad x_3' = \varphi_3$$

en op $[x'']$ de schalen:

$$x_1'' = f_1, \quad x_2'' = f_2 \quad \text{en} \quad x_3'' = \psi_3$$

(104)

$f_1 = \frac{1}{z_1}$, dan kan de kegelsnedeschaal $[z_1]$ ook verkregen worden door projectie van een regelmatige schaal $x = \mu z_1$.

§ 117. Benodigde gegevens.

De hiervoor genoemde waaiers naar de metrische schalen $[x']$, en $[x'']$, zijn regelmatig. Wanneer drie genummerde stralen van zulk een waaier, een regelmatige schaal in de gelijk genummerde schaalpunten snijden, dan gaan ook alle overige stralen door de overeenkomstige schaalpunten van de regelmatige schaal.

Bij de projectieve vorming van kegelsneden, wordt van deze eigenschap gebruik gemaakt, om een waaier (x') of (x'') te construeeren, wanneer daarvan drie genummerde stralen bekend zijn.






groep gegevens					
a		4			
b		3		1	
c		3			2
d	1	2			1
e	2	1			
f	2		1		

Fig. 64.

Op grond van deze constructiewijze, kan de vorm van het kegelsnedeschaalenstel, ten deele worden beheerscht door de vrije keuze van eenige elementen, n.l. de ligging van punten en raaklijnen, al of niet genummerd. Hiervoor komen in aanmerking de groepen gegevens, voorgesteld in de tabel figuur 64.

Ter toelichting van de constructie, dienen de volgende aanwijzingen:

Groep a. De waaiers (x') en (x'') worden verkregen, door twee van de vier genummerde punten als toppunt aan te nemen en elk te verbinden met de drie overige punten. De verdere constructie heeft dan plaats, als zoeven is besproken.

Groep b. Neem het punt op de raaklijn als toppunt T' en verbindt dit met de drie genummerde punten. Uit de nu te construeeren waaier (x'), volgt het nummer van de gegeven raaklijn en dus van het gegeven punt daarop. Neem nu een der andere gegeven punten als toppunt T'' , en verbindt dit met de drie overige punten. Hieruit wordt dan (x'') verkregen.

Groep c. Verbindt elk van de twee ongenummerde punten, met de drie genummerde punten. Hieruit worden, op de bekende wijze, de waaiers (x') en (x'') verkregen.

Groep d. Neem weer het punt op de raaklijn als toppunt T' ,

en verbindt dit met de twee genummerde punten en met het ongenummerde punt. Uit de nu te construeeren waaier (x'), volgt het nummer van laatstgenoemd punt. Neem nu een ander genummerd punt als toppunt T'' en verbindt dit weer met de drie overige punten, waaruit dan de waaier (x'') verkregen wordt.

Groep e. Neem de beide punten op de raaklijnen als toppunten en verbindt elk van deze met de overige punten. Van elk der beide waaiers zijn dan drie genummerde stralen gegeven.

Groep f. Het punt op de derde raaklijn wordt gevonden met de *Stelling van Mac Laurin*: „Is in een driehoek een kegelsnede beschreven, dan gaan de verbindingslijnen van de hoekpunten met de raakpunten op de overstaande zijden, door één punt. De verdere constructie heeft plaats als bij groep e.

N.B. Van de gegeven punten mogen er geen drie collineair zijn, evenmin mogen er twee op één raaklijn liggen, of mogen er drie raaklijnen concurrent wezen. Voorts mogen twee raaklijnen geen gemeenschappelijk raakpunt hebben.

§ 118. Symmetrie van de gegevens.

Wanneer vier elementen, dus vier, al of niet genummerde punten en (of) raaklijnen, symmetrisch zijn gelegen, dan is de as van symmetrie een der assen van de kegelsnede.

De mogelijke gevallen van symmetrie zijn in figuur 65 geteekend. De daarbij geplaatste letters verwijzen naar die groepen van figuur 64, waarbij het geteekende geval van symmetrie kan optreden.

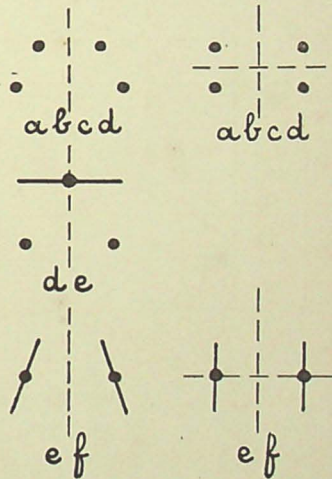


Fig. 65.

Cirkelnogrammen.

§ 119. Wanneer voor de constructie van een kegelsnede-nomogram, wordt uitgegaan van de, volgens de hoekpunten van een rechthoek gelegen, eindpunten der schalen $[z_1]$ en $[z_2]$, dan is het van belang te weten, welke der verhouding moet wezen

, waaruit na eliminatie van de coëfficiënten volgt:

$$\frac{B}{L} = \sqrt{-\frac{(\Omega_1 - A_2)(\Omega_2 - A_1)}{(\Omega_1 - A_1)(\Omega_2 - A_2)}} = \lambda. \quad (111)$$

Is deze verhouding niet te gebruiken, bij voorbeeld omdat ze te groot is, en wordt een andere verhouding:

$$\frac{B}{L} = \lambda'$$

gekozen, dan zal de kegelsnede een ellips zijn, waarvoor de verhouding van kleine tot groote as $\frac{\lambda'}{\lambda}$ zal bedragen.

Zou de vorm achter het wortelteeken in (111), negatief worden, dan moet, om een cirkelnomogram te kunnen verkrijgen, een der schalen van het schalenstel omgekeerd worden, zoodat b.v. $A_2 = f_2(\omega)$ en $\Omega_2 = f_2(a)$ wordt. Wordt de verhouding $\frac{\lambda'}{\lambda}$ negatief genomen, dan zal de kegelsnede een hyperbool zijn.

Projectieve vorming van kegelsneden.

§ 120. Welken vorm en welke ligging verkrijgt de kegelsnede, gevormd door de snijpunten van de gelijkgenummerde stralen van twee regelmatige waaiers?

Dit is op het eerste gezicht moeilijk te overzien. Daarom zullen wij trachten, met behulp eener bijzondere voorstellingswijze, dat overzicht te vergemakkelijken (zie figuur 67 tegenover blz. 176).

Trek daartoe door elk der beide waaiers een transversaal (I' en I''), zóó, dat daarop een metrische schaal wordt afgeteekend. Verbindt de toppunten T' en T'' van de beide waaiers.

Denken wij ons nu (bovenste figuur) een regelmatig net, bestaande uit twee, elkander loodrecht snijdende, regelmatige bundels, in figuur 67 aangegeven door hunne schaalverdeeling op de assen. Die op de horizontale as is metrisch en stemt dus overeen met de metrisch verdeelde transversalen in de onderste figuur; de verdeeling op de verticale as is een regelmatige schaal voor de grootte van den hoek, welke een straal van een der waaiers met de lijn $T'T''$ maakt.

Op dit net, wordt het verband tusschen den afstand van een schaalpunt op den transversaal tot het nulpunt en den hoek, welke de bijbehorende straal met de lijn $T'T''$ maakt, door een **tangenslijn** weergegeven.

Daar een straal na 180° draaiing, een transversaal weer in hetzelfde schaalpunt snijdt, bestaat de voorstelling op het regel-

matige net, feitelijk uit twee tangenslijnen, 180° boven elkander gelegen.

De waaier T' , is aldus in de bovenste figuur, door de twee dik getrokken tangenslijnen K , voorgesteld.

§ 121. De beteekenis van enkele bijzondere punten van zulk een tangenslijn, corresponderende met bijzondere stralen van den waaier, willen wij even toelichten.

In de eerste plaats stemt het midden van de tangenslijn, dat is haar buigpunt, overeen met den loodrecht op den transversaal getrokken straal.

De oneindig verre punten van de tangenslijn, komen overeen met den evenwijdig aan den transversaal getrokken straal, dat is dus met den straal naar het vluchtpunt.

Het snijpunt van de tangenslijn met de horizontale as, of met de horizontale lijn voor 180° , stemt onderscheidenlijk overeen met een straal in de richting $T'T''$, of met een straal in de tegenovergestelde richting, beide stralen dus samenvallend met de verbindingslijn der toppunten T' en T'' .

§ 122. T'' is in de onderste figuur het gemeenschappelijke toppunt van vier waaiers. Eenvoudigheidshalve zijn deze waaiers zoo gekozen, dat zij allen door denzelfden transversaal I'' , volgens metrische schalen, gesneden worden.

Voorts is de afstand van I'' tot T'' , gelijk genomen aan die van I' tot T' .

De vier metrische schalen op I'' zijn gemerkt: $E(C)$, P , $H I$ en $H II$; de afkortingen beduidend van Ellips (Cirkel), Parabool, Hyperbool I en Hyperbool II.

De overeenkomstige tangenslijnen in de bovenste figuur, zijn op gelijke wijze gemerkt.

Omtrent deze tangenslijnen valt het volgende op te merken:

Door de bijzondere keuze van de vier waaiers T'' , zijn die tangenslijnen, behoudens het tegengestelde verloop van $H II$, allen onderling en met K , gelijk van vorm. Bovendien hebben de vier tangenslijnen gemeenschappelijke asymptoten; in de onderste figuur vallen dus de vier stralen naar het vluchtpunt te zamen.

§ 123. Elk der vier waaiers T'' vormt nu met den waaier T' een kegelsnede, welker vorm en ligging beoordeeld kan worden uit de ligging van de overeenkomstige tangenslijn ten opzichte van de tangenslijn K .

*De combinatie van de op eenzelfde verticale lijn gelegen punten

van de twee tangenslijnen, correspondeert n.l. met de combinatie van twee gelijkgenummerde stralen van de beschouwde waaiers, dus met een punt van de door hen voortgebrachte kegelsnede.

Bijzondere combinaties zijn:

1^o. De twee, op eenzelfde verticaal gelegen punten vallen samen, (zie de ∞ gemerkte punten in de bovenste figuur) de twee tangenslijnen hebben daar dus een *gemeenschappelijk punt*. De twee bijbehorende stralen in de onderste figuur zijn dan evenwijdig, de kegelsnede heeft in dat geval dus een oneindig ver gelegen punt.

Is het gemeenschappelijke punt een **snijpunt** van de twee tangenslijnen, dan beteekent dit, dat de eene straal den andere, wat de richting betreft, inhaalt en voorbijgaat en dat dus het snijpunt van de beide stralen, voor en na den evenwijdigen stand, in tegengestelde richtingen gelegen is en bijgevolg het oneindig verre punt *op een asymptoot ligt*.

Is daarentegen het gemeenschappelijke punt een **raakpunt** van de twee tangenslijnen, dan beteekent dit, dat de eene straal den andere evenwijdig komt en daarna weer achterblijft, en dat dus het snijpunt van de beide stralen, voor en na den evenwijdigen stand, ongeveer in dezelfde richting gelegen blijft. Het oneindig verre punt *ligt dan niet op een asymptoot*.

2^o. Van de op eenzelfde verticaal (de lijnen T'' en T' in de bovenste figuur) gelegen twee punten, valt er een samen met de horizontale as, of de horizontale lijn voor 180° .

Is dit het punt van een der tangenslijnen **K**, dan stelt dat punt den straal uit T' voor, welke samenvalt met $T'T''$. De combinatie van de twee punten op de verticaal, komt dus overeen met het toppunt T''

Is het bedoelde punt, een punt van een der andere tangenslijnen, dan stelt dat punt den straal uit T'' voor, welke samenvalt met $T'T''$. De combinatie van de twee punten op de verticaal komt dan overeen met het toppunt T' .

§ 124. Wat de ligging van de twee tangenslijnen ten opzichte van elkander betreft, kunnen wij vier gevallen onderscheiden:

1^o. De twee tangenslijnen [**E(C)** en **K**], hebben géén gemeenschappelijke punten. De kegelsnede is dan een **ellips E(C)**.

Zijn de twee tangenslijnen bovendien gelijk van vorm en liggen hunne middens recht boven elkaar, dan is hunne verticale afstand in de bovenste figuur, dus ook de hoek tusschen de twee stralen in de onderste figuur, constant en is de kegelsnede dus een **cirkel E(C)**.

2°. De twee tangenslijnen (**P** en **K**) raken elkander. De kegelsnede is dan een **parabool P**. De hoek, welke wij bij het raakpunt aflezen, geeft de richting van de as van de parabool aan. De verticalen **T'** en **T''** van dit paar tangenslijnen, liggen ter weerszijden van het raakpunt, dus ligt in de onderste figuur, op elke paraboolhelft een toppunt.

3°. De twee tangenslijnen (**H I** en **K**), hebben twee snijpunten, De kegelsnede is nu een **hyperbool H I**. De hoeken, welke wij bij de snijpunten aflezen, komen overeen met de richtingen der asymptoten. Het gedeelte van de tangenslijnen tusschen de twee snijpunten, komt overeen met de eene tak van de hyperbool (niet geteekend), het gedeelte daarbuiten met de andere tak. *De beide toppunten zullen steeds op denzelfden tak liggen.*

4°. De waaiers **E(C)**, **P** en **H I** zijn allen in dezelfde richting genummerd als **T'**, namelijk, van uit het toppunt gezien, naar links. Daardoor zijn, in de bovenste figuur, de betreffende tangenslijnen allen stijgend naar rechts.

De tangenslijn, van elken, in tegengestelden zin als **T'** genummerden, waaier **H II**, zal naar rechts dalen en daardoor met **K** steeds twee snijpunten hebben. De gevormde kegelsnede is dan *steeds* een **hyperbool (H II)**.

Het gedeelte van de tangenslijnen tusschen de twee snijpunten, komt weer overeen met de eene tak van de hyperbool, het gedeelte daarbuiten, met de andere tak. Daar steeds een der verticalen **T** in het eene gedeelte, de tweede in het andere gedeelte zal liggen, *zal dus op elken tak van de hyperbool een toppunt gelegen zijn.*

Zijn de tangenslijnen, behoudens hunne tegengestelde ligging, gelijk van vorm (**H II** en **K**), en liggen hunne middens recht boven elkaar, dan zijn zij in verticalen zin symetrisch ten opzichte van de beide snijpunten en liggen deze punten dus 90° uiteen. In de onderste figuur staan dan de asymptoten loodrecht op elkaar en is de hyperbool dus gelijkzijdig.

Snijden de twee tangenslijnen elkander op de horizontale as, of op de horizontale lijn voor 180° , dan ontardt de kegelsnede in twee snijdende lijnen, waarvan **T'T''** er een is.

Daar de vier waaiers **T''**, een gemeenschappelijke straal **T''V** hebben naar het oneindig genummerde schaalpunt op den transversaal **l''**, gaan de vier besproken, kegelsneden allen door een gemeenschappelijk vluchtpunt **V**.



PÉRPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

§ 125. **Voorbeeld.** *Bepaling der afstandcorrectie bij direct gericht vuur.* (figuur 69).

$$a^2 = b^2 + (a + c)^2 - 2b(a + c) \cos \psi.$$

, dat is de cosinusregel, toegepast op den driehoek: afstandmeter — geschut — doel, waarbij:

a = de met den afstandmeter bepaalden afstand tot het doel in m. (400 tot 10.000);

b = de basislengte, dat is de afstand, waarop de afstandmeter, van het geschut verwijderd, is opgesteld; veelal, — ook voor figuur 69 —, aangenomen op 400 m.;

ψ = de hoek tusschen de basis en de richtlijn van het geschut (0° tot 180°);

c = de correctie in m., dat is de afstand, welke bij a gevoegd moet worden, om den afstand van het geschut tot het doel te verkrijgen (-400 tot $+400$).

De gegeven betrekking kan op eenvoudige wijze herleid worden tot de vergelijking van type (IX):

$$-a \cdot b \cos \psi - (-a + b \cos \psi) \cdot c + \frac{1}{2} (b^2 + c^2) = 0.$$

Wij wenschen deze vergelijking voor te stellen op een kegel-snedeschalenstel, bestaande uit een halve ellips. Vooreerst onderzoeken wij vluchtig, welke ligging $[z_3]$ dan zal verkrijgen.

Daar voor $c = b$ volgt, dat $\psi = 0^\circ$ en $a = -b$ en voor $c = -b$ volgt $\psi = 180^\circ$ en $a = b$, vinden wij een vorm van het nomogram, als in figuur 68 is geschetst.

Wij kiezen nu de plaatsen voor de drie eindpunten der schalen en nemen de raaklijnen aan het schalenstel in K en M onderling evenwijdig en loodrecht op KM .

Hierdoor worden KM en de middelloodlijn van KM de assen van de ellips.

Van den waaier met toppunt K , zijn dan drie stralen met hunne nummers bekend, n.l.:

de raaklijn in K met het nummer	$f_1(\alpha) = -10.000;$
de straal KL " " "	$f_1(\omega) = f_2(\alpha) = -400;$
de straal KM " " "	$f_2(\omega) = +400.$

Evenzoo van den waaier met toppunt M , de drie stralen MK , ML en de raaklijn in M , met dezelfde nummers -10.000 , -400 en $+400$.

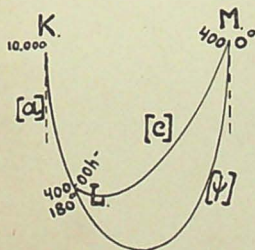
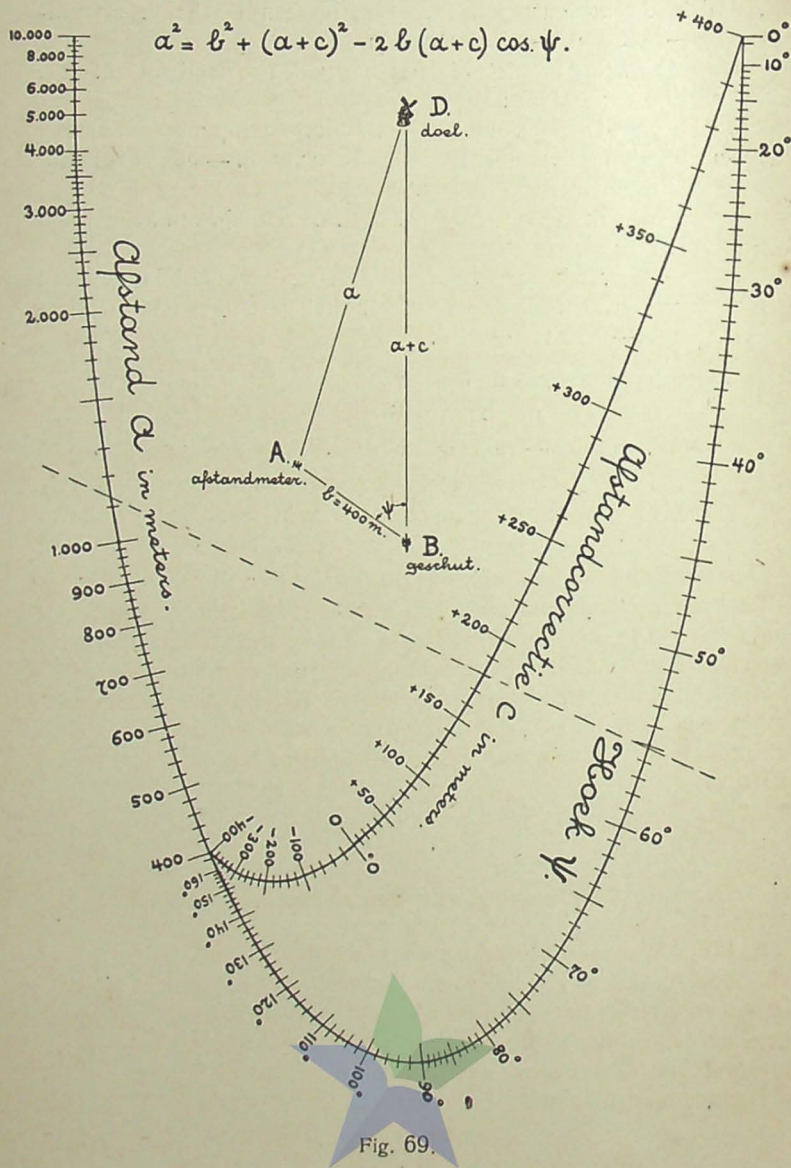


Fig. 68.

Bepaling der Afstandcorrectie
bij direct gericht vuur.



Trekken wij dus door elk van de beide waaiers een transversaal, waarop wij, uitgaande van de drie gegeven schaalpunten, schalen voor de beide veranderlijken construeeren, dan bouwen wij, door de snijpunten van overeenkomstige stralen te bepalen, het kegelsnedeschalenstel puntsgewijze op.

Constructie van [c]. Hiervoor bepalen wij met de zoeven gebruikte waaiers, de oorsprong **O** en het vluchtpunt **V** van het kegelsnedeschalenstel. Daarna passen wij de formules (110) toe en kunnen dus [c] construeeren met behulp van de waaiers uit **V** en **O**, naar de schalen:

$$x_3' = 2c \quad \text{en} \quad x_3'' = \frac{c^2 + 160.000}{2c}$$

, onderscheidenlijk evenwijdig aan de raaklijn in **V** en aan de lijn **OV**.

Voor de constructie van [c], in figuur 69, werd in plaats van $[x_3']$, een daarmede evenwijdige schaal, en in plaats van $[x_3'']$, een schaal $\left[\frac{1}{x_3''}\right]$, evenwijdig aan de raaklijn in **O**, gekozen.

De raaklijnen in **V** en **O** gaan beiden door een punt **S**, hetwelk het toppunt is van een waaier afleeslijnen voor

$$c + c' = 0 \quad \text{en} \quad \psi + \psi' = 180^\circ.$$

Toepassing van het nomogram.

Met een afstandmeter wordt de afstand tot het doel bepaald op ongeveer 1135 m. De basislengte, d.w.z. de afstand tot het geschut is 400 m., terwijl de richting van den vuurmond met die basis een hoek maakt van ongeveer $55^\circ 10'$. Uit het nomogram blijkt dan (stippellijn), dat de correctie + 180 m. zal bedragen en dus is de afstand van den vuurmond tot het doel ongeveer 1315 m.

Verplaatsing van den oorsprong.

§ 126. Wanneer oorsprong en vluchtpunt beiden buiten het vlak van teekening zouden vallen, kunnen wij de formules (106), (108) en (110) niet gebruiken. Door een herleiding van de gegeven vergelijking, kunnen wij echter de oorsprong zoo verplaatsen, dat deze daarna wel in het teekenvlak zal liggen.

Daartoe herleiden wij:

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0 \quad (\text{IX})$$

$$\text{tot} \quad F_1 F_2 - (F_1 + F_2) F_3 + G_3 = 0 \quad (112)$$

$$\text{met} \quad \left. \begin{array}{l} F_1 = f_1 + b \\ F_2 = f_2 + b \\ F_3 = f_3 + b \end{array} \right\} \quad G_3 = g_3 + 2bf_3 + b^2 \quad (113)$$

Bij substitutie van (113) in (112) zal blijken, dat de functie-vergelijking (IX) terug wordt verkregen.

§ 127. **Voorbeeld.** *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren (figuur 70).*

Een grondkeerende muur van rechthoekige doorsnede, van B m. dik en H m. hoog, kan dezelfde grondmassa keeren als een muur van trapeziumvormige doorsnede, met een bovenbreedte van l B m. en een breedte van B m. op h H m. van den bovenkant, wanneer er tusschen l, h en de verhouding p, van de soortelijke gewichten van den grond en den muur, een betrekking bestaat:

$$(1 + l)h^2 - l(1 + p)h - \frac{1}{3}(1 - l)(1 + 2p) = 0.$$

Deze vergelijking kan herleid worden, (zie deel IV, § 159), tot een vergelijking van type (IX):

$$\frac{-1}{l+1} \cdot p - \left(\frac{-1}{l+1} + p \right) \frac{3h-2}{4-3h} + \frac{3h^2-3h+1}{4-3h} = 0.$$

Het bereik van de veranderlijken is:

voor l van 0,5 tot 1,

„ p „ 0,5 „ 1,

„ h „ 0,75 „ 1,

en dus is:

$$f_1(\alpha) = -\frac{2}{3}, \quad f_1(\omega) = -\frac{1}{2}, \quad f_2(\alpha) = \frac{1}{2}, \quad f_2(\omega) = 1.$$

Plaatsen wij deze eindpunten van [l] en [p], in de hoekpunten van een rechthoek, dan zal bij een vluchtig onderzoek blijken, dat oorsprong en vluchtpunt van het kegelsnedeschalenstel [l, p], buiten het teekenvlak vallen. Wij nemen daarom onze toevlucht tot het verplaatsen van den oorsprong, door toepassing van de formules (113). Neem daarin $b = -1$, dan wordt dus ω_2 de oorsprong van het kegelsnedeschalenstel en wordt de nieuwe vergelijking van type (IX):

$$-\frac{l+2}{l+1} \cdot (p-1) - \left(-\frac{l+2}{l+1} + p-1 \right) \frac{6h-6}{4-3h} + \frac{3h^2-9h+6}{4-3h} = 0$$

, waarvoor:

$$f_1(\alpha) = -\frac{5}{3}, \quad f_1(\omega) = -\frac{3}{2}, \quad f_2(\alpha) = -\frac{1}{2}, \quad f_2(\omega) = 0.$$

Overgang van rechthoekige op trapexiumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.

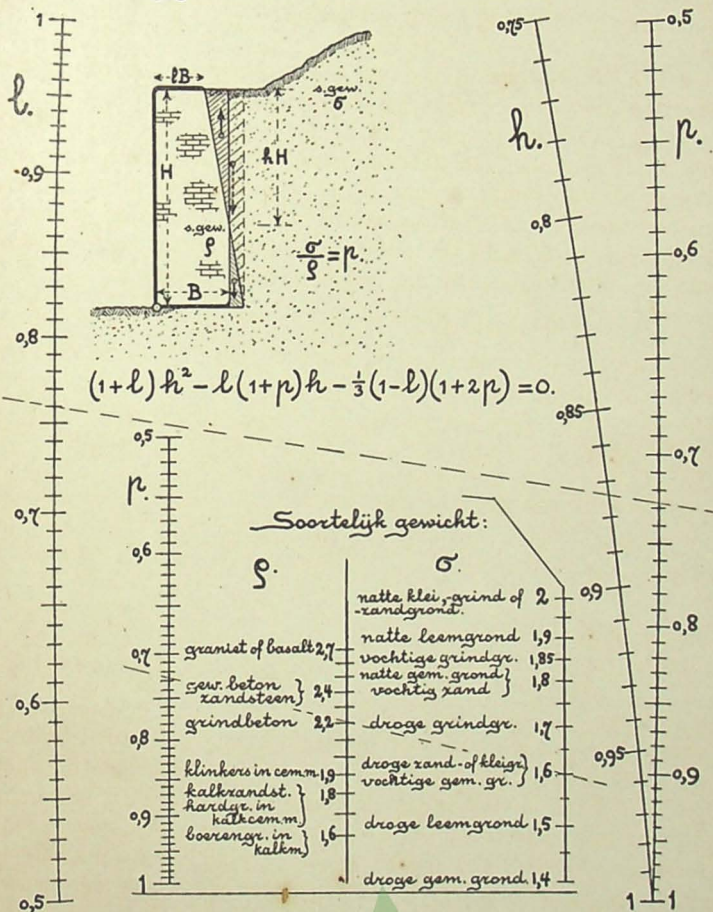


Fig. 70.

Nadat wij nu, op de bekende wijze, met waaiers uit twee van de vier gegeven genummerde punten, het kegelsnedeschalenstel hebben geconstrueerd, kunnen wij $[z_3]$ construeeren met de formules (106):

$$x_3' = \frac{g_3 - \tau'' f_3}{f_3 - \tau''} = \frac{3h^2 - 9h + 6 - \tau''(6h - 6)}{6h - 6 - \tau''(4 - 3h)}$$

Het is gunstig $\tau'' = -\frac{3}{2}$ te nemen, dan wordt

$$x_3' = 2h - \frac{2}{h}$$

, terwijl uit de formules (106) verder volgt:

$$x_3'' = \frac{g_3}{f_3} = 0,5h - 1.$$

Toepassing van het nomogram:

Een 2 m. dikke en 6,5 m. hooge muur van grindbeton, moet vervangen worden door een muur van trapeziumvormige doorsnede, met een bovenbreedte van 1,52 m. Achter den muur is vochtige gemengde grond. Dus is $\sigma = 1,6$, $\rho = 2,2$ en dus (stippellijn in hulpnomogram): $p = \frac{\sigma}{\rho} = 0,727$.

$$l = \frac{1,52}{2} = 0,76.$$

Uit het nomogram volgt dan (stippellijn) voor h de waarde 0,874, zoodat de muur op $0,874 \times 6,5 = 5,68$ m. van den bovenkant, een breedte van 2 m. zal moeten verkrijgen. De onderbreedte zal dan slechts 2,07 m. bedragen.

Projectieve constructie van het kegelsnedenomogram met een evenwijdig hulpschalenstel.

§ 128. Op een evenwijdig hulpschalenstel $[\varphi, \psi]$, bestaande uit de functieschalen

$$x = \mu' \varphi \quad \text{en} \quad y = \mu'' \psi$$

, worden van de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi f_1^2 + \psi &= f_1 \\ \varphi f_2^2 + \psi &= f_2 \\ \varphi g_3 + \psi &= f_3 \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

, de twee eerste voorgesteld door schalen op een gemeenschappelijke kegelsnede, de derde door een schaal van anderen vorm.

Worden uit (114) de functies φ en ψ geëlimineerd, dan wordt, evenals in § 115, de functievèrgelijking:

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0 \quad (\text{IX})$$

verkregen. Met behulp van de in § 54 behandelde projectieme-

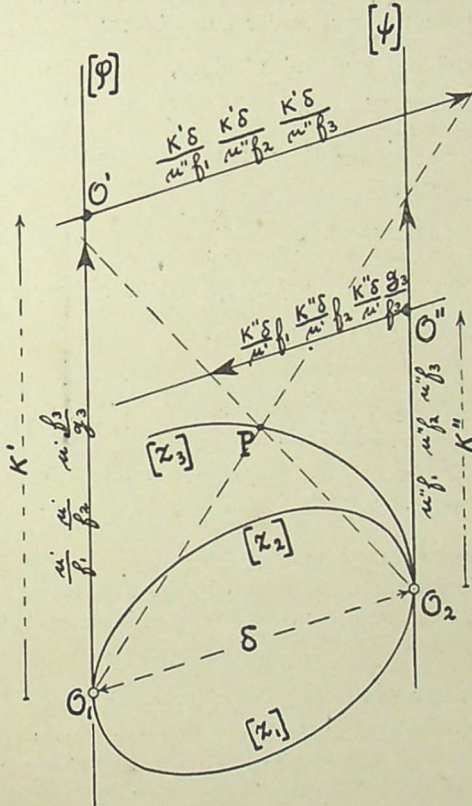


Fig. 71.

thoden, kunnen dus de schalen van het kegelsnedenomogram als volgt worden geconstrueerd (figuur 71):

[z₁] door snijding van projectielijnen,

uit O₁ naar een schaal $x = \mu''f_1$ op $[\psi]$; of naar een schaal $x = \frac{K'\delta}{\mu''f_1}$ op een drager // O₁O₂, met haar oorsprong O' op $[\varphi]$ op een afstand K' van O₁;

en uit O₂ naar een schaal $x = \frac{\mu''}{f_1}$ op $[\varphi]$; of naar een schaal

$x = \frac{K''\delta}{\mu'} f_1$ op een drager // O_2O_1 , met haar oorsprong O'' op $[\psi]$ op een afstand K'' van O_2 .

$[z_2]$ door snijding van projectielijnen als voren, na vervanging van f_1 door f_2 in de functies der hulpschalen.

$[z_3]$ door snijding van projectielijnen,

uit O_1 naar een schaal $x = \mu''f_3$ op $[\psi]$; of naar een schaal $x = \frac{K'\delta}{\mu''f_3}$, op een drager // O_1O_2 , met haar oorsprong O' op $[\varphi]$ op een afstand K' van O_1 ;

en uit O_2 naar een schaal $x = \mu' \frac{f_3}{g_3}$ op $[\varphi]$; of naar een schaal $x = \frac{K''\delta}{\mu'} \cdot \frac{g_3}{f_3}$, op een drager // O_2O_1 , met haar oorsprong O'' op $[\psi]$ op een afstand K'' van O_2 .

Het kegelsnedenomogram, hetwelk met deze constructiewijze verkregen wordt, heeft een elliptischen of hyperbolischen drager voor $[z_1]$ en $[z_2]$, deze drager raakt in O_1 aan $[\varphi]$ en in O_2 aan $[\psi]$. Men zal gemakkelijk inzien, dat O_1 overeenkomt met het vluchtpunt V en O_2 met den oorsprong O van het kegelsnedeschalenstel.

§ 129. Cirkelnomogrammen.

Wanneer de oorspronglijn O_1O_2 loodrecht staat op het hulpschalenstel $[\varphi, \psi]$ en wanneer verder voldaan is aan de voorwaarde:

$$\mu' \mu'' = \delta^2 \quad (115)$$

, dan is de drager van $[z_1, z_2]$ een cirkel met O_1O_2 als middellijn.

Tegenover het kegelsnedenomogram op een ellips-, hyperbool-, of paraboolvormigen drager, heeft het cirkelnomogram het voordeel van eenvoudiger constructie, het nadeel echter van meerdere gebondenheid in de keuze van de ligging der schalen.

Voorbeeld. Gemiddelde straal van een kanaal met taluds 1 : 1 (figuur 72).

De voor te stellen betrekking

$$R = \frac{bd + d^2}{b + d\sqrt{8}}$$

, is als type (IX) te schrijven:

$$b(-R\sqrt{8}) - (b - R\sqrt{8})(-d\sqrt{8}) + d^2\sqrt{8} = 0$$

Gemiddelde straal
van een kanaal met taluds 1:1.

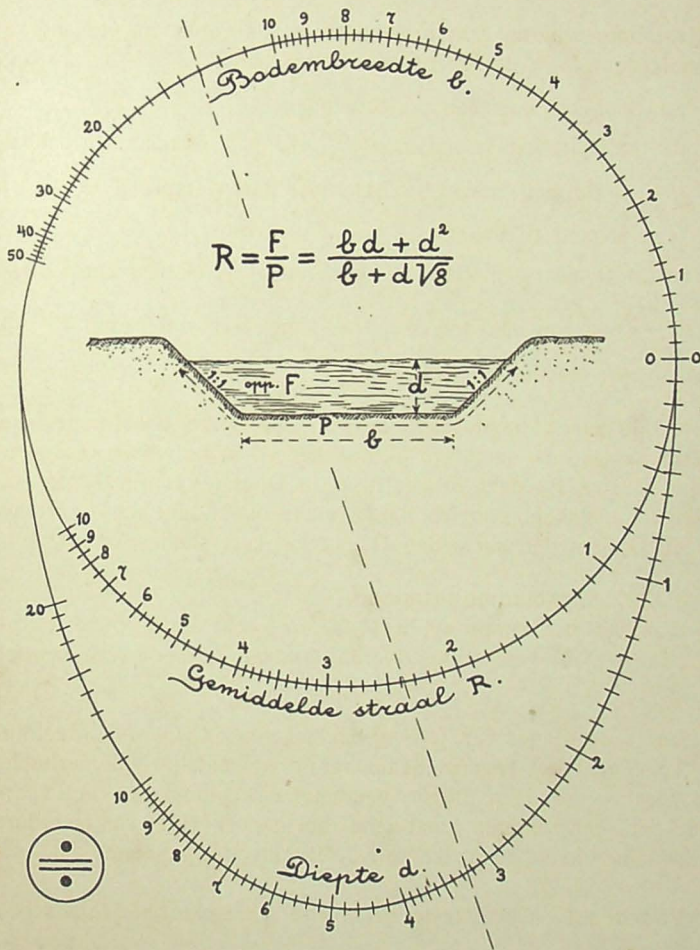


Fig. 72.

, waarbij dus de functies zijn:

- | | | |
|-------|-------|-----------------|
| f_1 | | b , |
| f_2 | | $-R\sqrt{8}$, |
| f_3 | | $-d\sqrt{8}$, |
| g_3 | | $d^2\sqrt{8}$. |

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 72 werd aangenomen:

$$\delta = 20, \quad \mu'' = 2,5 \quad \text{en dus was volgens (115):}$$

$$\mu' = \frac{\delta^2}{\mu''} = 160$$

[b] werd verkregen, gedeeltelijk door projectie uit O_1 van een schaal $x = 2,5b$ op $[\psi]$; anderdeels door projectie uit O_2 van een schaal $x = 0,5b$ evenwijdig aan O_2O_1 , waarvoor $K'' = 4$ was.

[R] werd geconstrueerd, gedeeltelijk door projectie uit O_1 van een schaal $x = -5R$ evenwijdig aan $[\psi]$, op een afstand $10\sqrt{2}$ van O_1 ; anderdeels door projectie uit O_2 van een schaal $x = 2,5R$ evenwijdig aan O_2O_1 , waarvoor $K'' = -5\sqrt{2}$ was.

[d] werd verkregen, ten deele door projectie uit O_1 van een schaal $x = -5d$, als voren genoemd, of, wat op hetzelfde neerkomt van de reeds verkregen schaal [R]; anderdeels door projectie uit O_2 van een schaal $x = 1,25d$ evenwijdig aan O_2O_1 , waarvoor $K'' = -10$ was.

De voorgestelde betrekking heeft weer de eigenschap, dat een stel waarden voor de veranderlijken geldig blijft, wanneer het evenredig wordt vergroot of verkleind. Deze eigenschap is in figuur 72 door het bekende teeken aangeduid.

Toepassing van het nomogram.

Voor een kanaal met taluds 1 : 1, een bodembreedte b van 13 m. en een diepte d van 3,25 m., is de gemiddelde straal $R = 2,38$ m., (zie de afleeslijn in het nomogram).



Opgaven 119 t/m 121 voor de constructie van nomogrammen van de 4^e orde (kegelsnede-nomogrammen).

119. Stel (figuur 73) bij de zuigerbeweging:

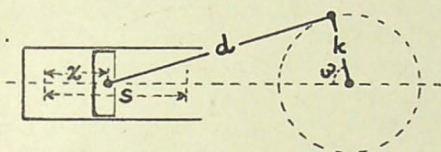


Fig. 73.

k = de lengte van de kruk,

d = de lengte van de drijfstang,

s = de zuigerslaglengte,

z = de gedeeltelijke zuigerslag,

ω = de hoek tusschen den laagsten krukstand en den krukstand bij een gedeeltelijke slag z .

Noem verder:

$$\frac{d}{k} = \rho \quad \text{en} \quad \frac{s}{z} = \sigma$$

, dan is:

$$\sigma = \frac{1 - \cos \omega}{2} + \frac{\rho}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \omega}{\rho^2}} \right). \quad (\text{Soreau})$$

120. De gemiddelde straal van een kanaal, van trapeziumvormige doorsnede, met taluds 2 : 3, een bodembreedte van b m. en een diepte van d m., is in m.:

$$R = \frac{bd + 1,5d^2}{b + d\sqrt{13}}.$$

121. Bij kettingen met gesoldeerde schalmen, is de trekkracht, waarbij de ketting breekt, gelijk aan het product van de doorsnede van den schalm en de maximum trekspanning in het ijzer, gedeeld door een coëfficiënt a , waarvan de waarde is:

$$a = 1 + 4(m - 1) \left(1 \pm \frac{\pi}{2n + \pi m} \right).$$

, waarin $m = \frac{\rho}{d}$ en $n = \frac{l}{d}$, als:

ρ = de straal van het midden der halve bogen van de schalmen,
 $2l$ = de lengte van elk der twee rechte gedeelten van de schalmen;
 d = de dikte der schalmen.

Het + teeken geldt voor gewone schalmen, het - teeken voor geschoorde schalmen (damkettingen). (Soreau).

Opgaven 122 t/m 128 voor de constructie van nomogrammen van de 5^e orde, type VIIIa.

122. De warmteovergang tusschen twee vloeistoffen met temperaturen t_1 en t_2 in $^{\circ}\text{C}$., is evenredig met:

$$A = \frac{t_1 - t_2}{\ln t_1 - \ln t_2}$$

(t_1 en t_2 van 1 tot 100).

123. De zwaartepuntsafstand van een halven vlakken ring, (zie figuur 74), is:

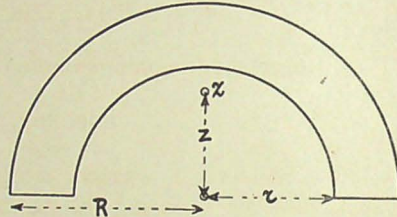


Fig. 74.

$$z = \frac{4}{3\pi} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

124. Idem van een halven hollen bol:

$$z = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$$

125. De hoeveelheid warmte, welke door straling overgaat van een lichaam met temperatuur t_1 , naar omringende vlakken met een temperatuur t_2 , (t_1 en t_2 in $^{\circ}\text{C}$.), is evenredig met:

$$a = \frac{\left(\frac{273 + t_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{273 + t_2}{100}\right)^4}{t_1 - t_2}$$

126. Voor den inhoud van een afgeknotten kegel geldt:

$$\frac{V}{h} = \frac{\pi}{12} (D^2 + Dd + d^2)$$

, waarin V de inhoud, h de hoogte, D en d de middellijnen van grond- en bovenvlak zijn. Neem samenvallende schalen $[D]$ en $[d]$, en een schaal $\left[\frac{V}{h}\right]$. (Zie § 113 formule (96)).

127. Wanneer $a < b < 1$ en $n > 0$, is $a^n - b^n$ maximum voor:

$$n = \frac{\log(-\log b) - \log(-\log a)}{\log a - \log b} \quad (\text{Schwerdt})$$

128. Wanneer $a > b > 1$ en $n < 0$, is $a^n - b^n$ minimum voor:

$$n = \frac{\log \log a - \log \log b}{\log b - \log a} \quad (\text{Schwerdt}).$$

HOOFDSTUK 20.

Kegelsnede-nomogrammen met rechte $[z_3]$.

Inleiding.

§ 130. $[z_3]$ is recht, wanneer er in (IX) een lineaire verwantschap is tusschen f_3 en g_3 , dus wanneer

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + (A f_3 + B) = 0 \quad (116)$$

, waarin A en B constanten zijn.

Deze vergelijking, is te schrijven in den vorm van de *algemeene functievergelijking van de 3^e orde* en kan als volgt herleid worden tot de functievergelijking (II) van die orde. (Zie ook Deel IV, § 173.)

Stel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A + \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + B} &= R' \\ \frac{1}{2}A - \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + B} &= R'' \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{1}{2}A + \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + B} &= R' \\ \frac{1}{2}A - \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + B} &= R'' \end{aligned}} \right\} \quad (117)$$

, zoodat dus R' en R'' de beide wortels zijn van een vierkantsvergelijking:

$$R^2 - AR - B = 0 \quad (118)$$

, dan is (116) te herleiden tot een functievergelijking van type II:

$$\frac{f_1 - R'}{f_1 - R''} \cdot \frac{f_3 - R''}{f_3 - R'} - \frac{f_2 - R''}{f_2 - R'} = 0 \quad (119)$$

of tot:

$$\frac{f_1 - R'}{f_1 - R''} \cdot \frac{f_2 - R'}{f_2 - R''} = \frac{f_3 - R'}{f_3 - R''} \quad (120)$$

§ 131. Omgekeerd kan bewezen worden, dat elk nomogram met drie rechte schalen, (dus van de typen II, III, V of VI) te vervormen is tot een kegelsnede-nomogram voor dezelfde betrekking. Daarbij blijft $[z_3]$ zelfs onveranderd. Het bewijs daarvoor steunt op de beroemde **Stelling van Pascal**. Het leert ons tevens de wijze van constructie van deze nomogrammen kennen.

¹⁾ In het bovenstaande is verondersteld dat $\frac{1}{4}A^2 + B > 0$. Voor de andere gevallen zie § 173.

Teekenen wij daartoe (figuur 75), een willekeurige kegelsnede zóó, dat deze gaat door de beide snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en

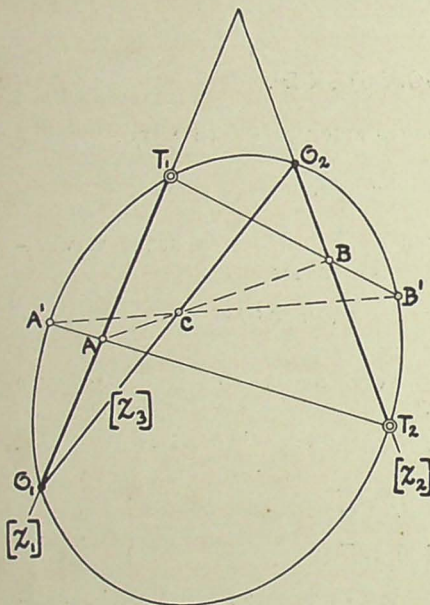


Fig. 75.

$[z_2]$. Laat die kegelsnede $[z_1]$ nogmaals snijden in T_1 , $[z_2]$ in T_2 . Van uit deze twee punten worden nu $[z_2]$ en $[z_1]$ op de kegelsnede geprojecteerd.

Wij zullen nu aantoonen, dat wanneer de projecties A' en B' met een schaalpunt C van $[z_3]$ in één rechte lijn liggen, ook A en B met C collineair zijn.

Beschouwen wij daartoe den in de kegelsnede beschreven zeshoek

$$O_1T_1B'A'T_2O_2.$$

Volgens de *Stelling van Pascal*, liggen de snijpunten A , B en C der drie paren overstaande zijden O_1T_1 en $A'T_2$, T_1B' en T_2O_2 , $B'A'$ en O_2O_1 , op één rechte lijn.

De afleeslijnen AB en $A'B'$ snijden $[z_2]$ dus in hetzelfde schaalpunt C .

§ 132. Constructie van het kegelsnede-nomogram met rechte $[z_3]$.

De constructie van het nomogram is uit het voorgaande duidelijk, de schalen op de kegelsnede worden dus verkregen, door projectie van de rechte hulpschalen $[z_1]$ en $[z_2]$ uit T_2 en T_1 ¹⁾. In plaats van deze hulpschalen, kunnen ook andere worden gebruikt, welke met de eerstgenoemde perspectief gelegen zijn ten opzichte van het bijbehorende toppunt T_2 of T_1 .

Ingeval wij uitgaan van een nomogram van type III of VI, zoo moeten wij ons in de keuze van de kegelsnede eenigszins beperken.

¹⁾ Deze toppunten kunnen beiden of een van beiden in het oneindige liggen, in dat geval zijn de projecteerende lijnen evenwijdig.

Bij type III liggen de snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$ in het oneindige. De kegelsnede kan dan slechts een hyperbool zijn, welke $[z_3]$ tot asymptoot heeft (figuur 76).

Bij type VI vallen de snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$ te zamen. De kegelsnede moet dan in dit punt aan $[z_3]$ raken (figuur 77).

§ 133. Voordeelen van het kegelsnedenomogram met rechte $[z_3]$, ten opzichte van het nomogram met drie rechte schalen.

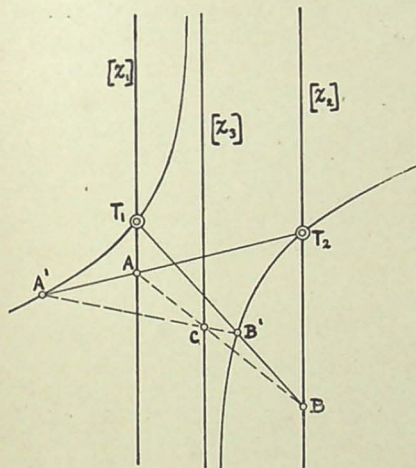


Fig. 76.

Het kegelsnede-nomogram heeft op het rechte nomogram voor, dat, bij het eerste, schalen voor elk willekeurig groot bereik, zelfs voor een bereik van $-\infty$ tot $+\infty$ mogelijk zijn. Inzonderheid is het kegelsnede-nomogram dan op zijn plaats, wanneer de schalen eenerzijds een groot bereik moeten omvatten, maar anderzijds gevegd wordt, dat, binnen een beperkter bereik, een zeer nauwkeurige aflezing mogelijk moet zijn (zie het voorbeeld § 135).

De constructie, in het bijzonder van cirkel-nomogrammen, is niet veel omslachtiger dan van een recht nomogram voor dezelfde betrekking. (Zie voorts § 145).

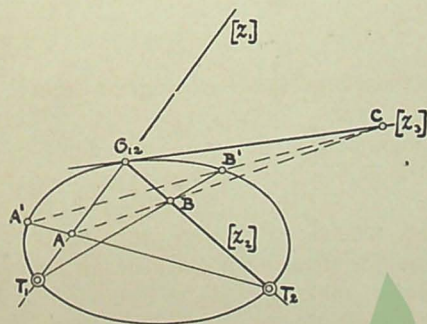
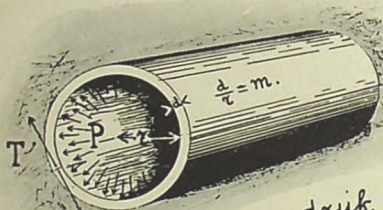


Fig. 77.

§ 134. 1^o Voorbeeld. Wanddikte van buizen, cylinders en ketels met inwendigen overdruk (figuur 78).

De voor te stellen betrekking kan geschreven worden als een vergelijking van type II:

Wanddikte van buizen, cylinders
en ketels met inwendigen overdruk.



$$\frac{T}{P} = 0,85 \frac{(m+1)^2 + 1}{(m+1)^2 - 1} + 0,45$$

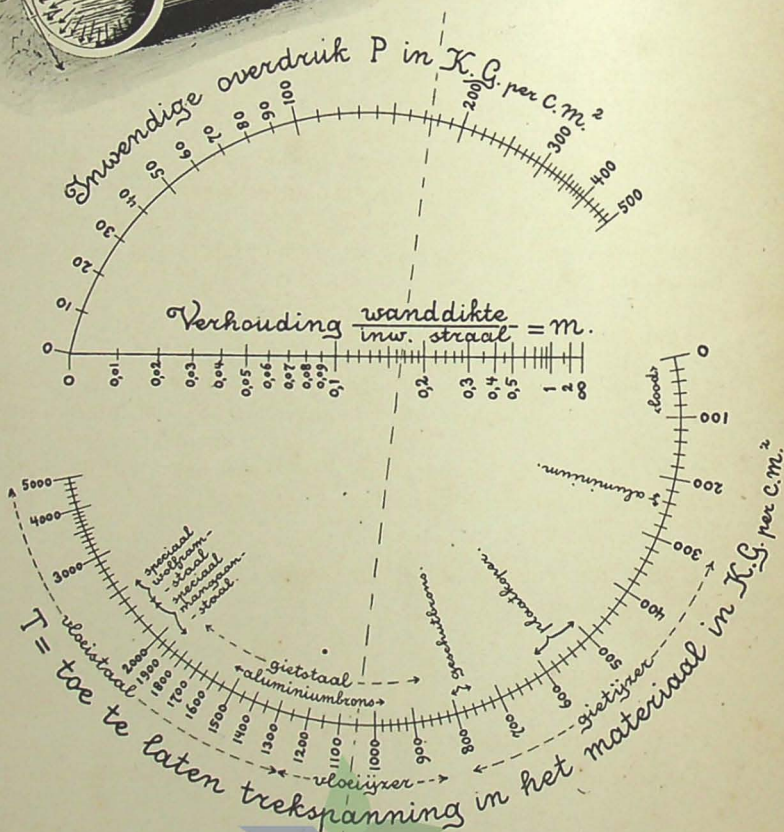


Fig. 78.

$$P \cdot \left[0,85 \frac{(m+1)^2 + 1}{(m+1)^2 - 1} + 0,45 \right] + (-T) = 0$$

en dus worden voorgesteld door een nomogram van dat type met de schalen:

$$[z_1] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x = \mu_1 P$$

$$[z_2] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot y = -\mu_2 T$$

$$[z_3] \cdot \cdot \cdot P = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_2 g_3 + \mu_1} = \frac{\mu_1 \delta (m^2 + 2m)}{\mu_2 (1,3 m^2 + 2,6 m + 1,7) + \mu_1 (m^2 + 2m)}$$

In de oorspronkelijke tekening voor figuur 78 werd gekozen:

$$\mu_1 = 0,075, \quad \mu_2 = 0,01 \quad \text{en} \quad \delta = 19,55.$$

Voor de kegelsnede werd een cirkel genomen, gaande door de snijpunten van $[z_3]$ met $[z_1]$ en $[z_2]$, maar zoodanig, dat voor $[T]$ een grootere boog ter beschikking kwam dan voor $[P]$, omdat eerstgenoemde schaal een grooter bereik en een aantal bijschriften heeft.

De toppunten T_1 en T_2 lagen onderscheidenlijk ongeveer in de schaalpunten $P = 197,5$ en $T = 1895$. Van T_2 uit, werd de rechte hulpschaal $[z_1]$; van T_1 uit, de hulpschaal $[z_2]$ op den cirkel geprojecteerd.

Toepassing van het nomogram.

Een 60 cm. wijde vloeiijzeren cylinder, waarvoor $T = 1050$ kg/cm.², moet kunnen worden blootgesteld aan een inwendigen overdruk van 174 kg/cm.². Uit het nomogram blijkt (stippellijn), dat de verhouding m minstens 0,166 moet bedragen, de dikte van den cylinder zal dus minstens 5 cm. moeten zijn.

§ 135. 2e Voorbeeld. *Electrische trillingen* (figuur 79).

$$\lambda = 1,884 \sqrt{LC}$$

, waarin

C = de capaciteit van de trillingsketen in μF ,

L = de zelfinductie van de trillingsketen in μH ,

λ = de golflengte van de opgewekte trilling.

De voor te stellen betrekking kan als type (II) geschreven worden:

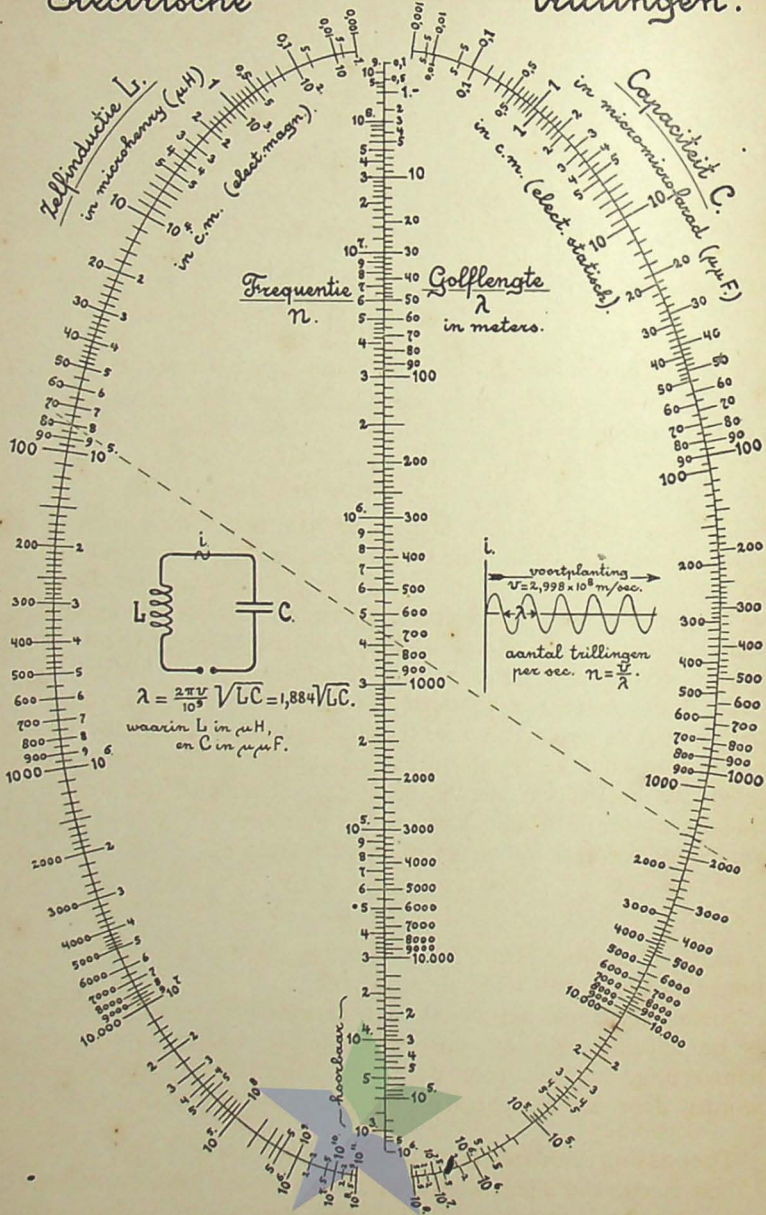
$$\sqrt{\frac{1}{L}} \cdot \frac{\lambda}{1,884} - \sqrt{C} = 0.$$

Hierbij wordt $[\lambda]$ middenschaal.

Om voor het groote bereik der veranderlijken, — het relatieve bereik is onderscheidenlijk 10^{11} en 10^7 —, betere schalen te verkrijgen,

Electrische

trillingen.



PERPUSTAKAAN NASIONAL
 REPUBLIK INDONESIA
 Fig. 79.

wordt de voorkeur gegeven aan den eveneens van type (II) zijnden vorm (zie blz. 72, opm. 2^o).

$$\sqrt[4]{\frac{1}{L}} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{1,884}} - \sqrt[4]{C} = 0.$$

Voor het nomogram type II, zijn dan de schalen:

$$[z_1] \dots x = \mu_1 \sqrt[4]{\frac{1}{L}}$$

$$[z_2] \dots y = \mu_2 \sqrt[4]{C}$$

$$[z_3] \dots p = \frac{\mu_1 \delta}{\mu_2 \sqrt{\frac{\lambda}{1,884}} + \mu_1}$$

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 79, werd

$$\mu_1 = 84,5, \quad \mu_2 = 4,75 \quad \text{en} \quad \delta = 34,7$$

gekozen, zoodat voor:

$$[z_3] \dots p = \frac{34,7}{0,0409\sqrt{\lambda} + 1}.$$

De constructie van het nomogram had plaats door eerst de ellips te teekenen, daarna de schaalverdeling $[z_3]$ te construeeren en vervolgens de rechte hulpschaal $[z_2]$ uit het toppunt T_1 op de kegelsnede te projecteeren (T_1 en T_2 zijn de eindpunten van de kleine as der ellips). $[C]$ (in $\mu\mu F$) is het spiegelbeeld van $[L]$ (in μH) en dus van deze over te nemen.

De drie schalen zijn voorts tot dubbelschalen gemaakt, zoodat het nomogram geschikt is voor toepassing, zoowel bij zelfinducties gegeven in microhenry, als in cm. en capaciteiten in micromicrofarad, als wel in cm., terwijl naast de golflengte λ , ook de frequentie n van de trilling kan worden afgelezen. De laatste twee veranderlijken zijn verbonden door de betrekking:

$$n = \frac{v}{\lambda} = \frac{2,998 \times 10^8}{\lambda}$$

, waarin v de voortplantingssnelheid van electromagnetische trillingen (o.a. van het licht), in m/sec. is.

Niettegenstaande het bereik der veranderlijken zeer groot is, is de aflezing voor de meer gebruikelijke waarden voldoende nauwkeurig, hetgeen voor deze betrekking alleen bereikt kon worden door den afgebeelden nomogramvorm te kiezen.

Toepassing van het nomogram.

Een elektrische slingerketen, bestaande uit een zelfinductie van

80 μH (= 8 cm.) en een capaciteit van 1700 $\mu\mu\text{F}$ (= 1530 cm.), heeft een golflengte van 695 m, of een frequentie van 432 kilohertz (= 432.000) (zie gestippelde afleeslijn).

§ 136. 3e Voorbeeld. *Parallelschakeling van weerstanden. Serieschakeling van capaciteiten. Lenzen-formule.* (figuur 80).

$$z_3 = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2},$$

of:

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$$

, wanneer wij nemen:

	z_1	voor	— R_1 ,	— C_1	en	— v ;
	z_2	"	R ,	C	"	f ;
en	z_3	"	R_2 ,	C_2	"	b .

De tweede schrijfwijze is volgens type (VI); de schalen voor het nomogram van dit type, zijn voor $\varphi = 120^\circ$ en bij gelijke moduli:

$$[z_1] \dots x = -\mu R_1, \text{ enz.}$$

$$[z_2] \dots y = \mu R, \text{ enz.}$$

$$[z_3] \dots r = \mu R_2, \text{ enz.}$$

Als kegelsnede werd wederom een cirkel genomen, welke dus, bij dit type, in den oorsprong aan $[z_3]$ moet raken.

De snijding met $[z_1]$ en $[z_2]$ is zóó gekozen, dat T_1 ligt in het schaalpunt $R_1 = 11,55$, T_2 in het schaalpunt $R_1 = \infty$ (overeenkomende met $R = 11,55$).

$[R_1]$ werd, voor $R_1 > 11,55$, geconstrueerd door projectie uit den oorsprong, van een regelmatige schaal // $[z_2]$.

Toepassing van het nomogram. (gestippelde afleeslijn).

10. Twee parallelle weerstanden van 23Ω en $5,75\Omega$, kunnen vervangen worden door een enkele weerstand van $4,6\Omega$, zonder dat de stroomsterkte in de buitenketen behoeft te veranderen.

20. Evenzoo kunnen een capaciteit van $23\mu\mu\text{F}$, in serie geschakeld met een capaciteit van $5,75\mu\mu\text{F}$, vervangen worden door een enkele condensator, met een capaciteit van $4,6\mu\mu\text{F}$.

30. De brandpunts-afstand van een lens, welke van een voorwerp op 2,3 m. afstand, een beeld geeft op 57,5 cm. achter de lens, is 46 cm.

Bij het nomogram is weer het evenredigheidsteeken geplaatst.

Parallelschakeling van weerstanden.
Serieschakeling van capaciteiten.
Lenzen-formule.

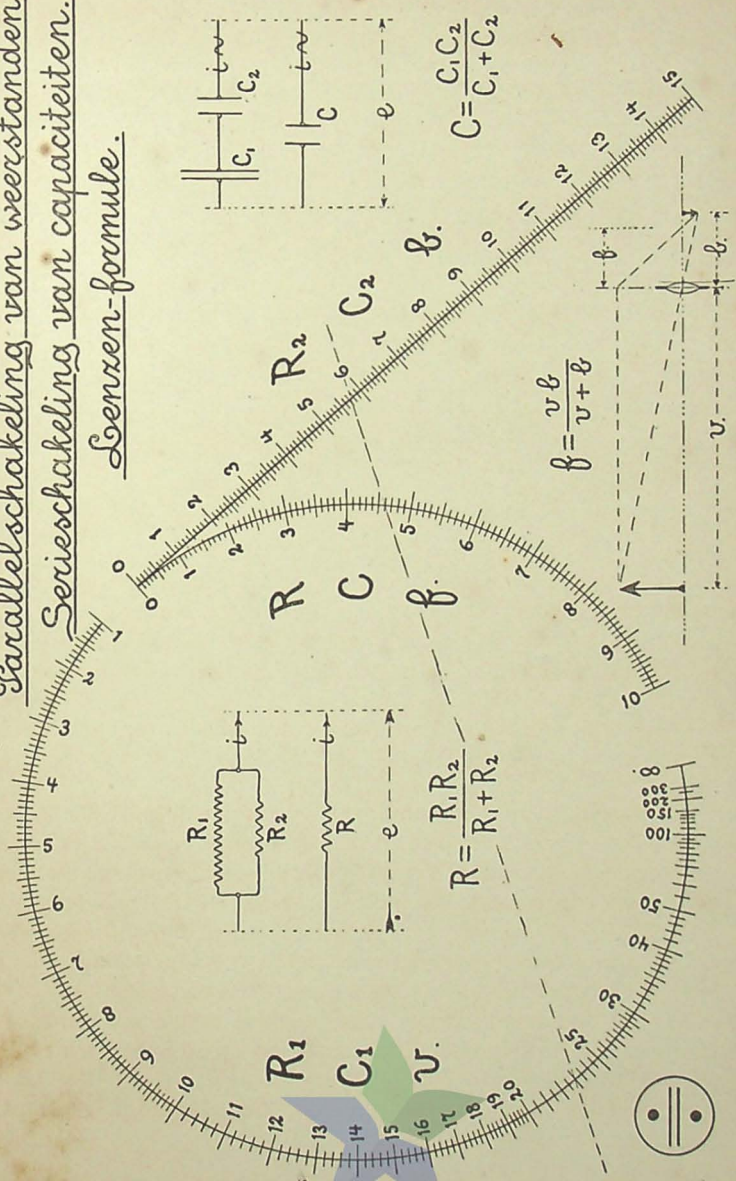


Fig. 80.

Nadere beschouwing van de projectieve eigenschappen van het kegelsnede-nomogram met rechte $[z_3]$.

§ 137. Wij keeren terug tot de algeheel projectieve vorming van het kegelsnede-nomogram, (zie blz. 165), en nemen ter vereenvoudiging van de formules aan, dat het toppunt T' in het vluchtpunt en T'' in den oorsprong van de kegelsnedeschaal $[x]$ valt.

In dat geval, was volgens (109):

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) x_3' + x_3' x_3'' = 0.$$

Deze vergelijking geldt zoowel voor alle waardestellen x_1, x_2 , verkregen door afleeslijnen gaande door een vast punt x_3', x_3'' ; als voor alle punten x_3', x_3'' van een vaste lijn, gaande door de kegelsnedeschaalpunten x_1 en x_2 .

Voor een rechte lijn, gaande door twee kegelsnedeschaalpunten x_{31} en x_{32} , is dus:

$$x_{31} x_{32} - (x_{31} + x_{32}) x_3' + x_3' x_3'' = 0 \quad (121)$$

Uit (109) en (121) volgt na eliminatie van x_3'' :

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) x_3' + (x_{31} + x_{32}) x_3' - x_{31} x_{32} = 0$$

of als wij
$$\left. \begin{array}{l} x_{31} + x_{32} = A \\ - x_{31} x_{32} = B \end{array} \right\} \quad (122)$$
 en stellen,

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) x_3' + (Ax_3' + B) = 0. \quad (123)$$

Worden weer de volgende schalen geteekend:

$$\left. \begin{array}{l} \text{op } [x'] \quad x_1' = f_1, \quad x_2' = f_2 \quad \text{en} \quad x_3' = f_3 \\ \text{en op } [x''] \quad x_1'' = f_1 \quad \text{en} \quad x_2'' = f_2 \end{array} \right\} \quad (124)$$

, dan verkrijgen wij dus, na de projectie van deze schalen uit V en O , een kegelsnedenomogram met een rechte schaal $[z_3]$, voor de functievergelijking (116):

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + (A f_3 + B) = 0.$$

Bijzondere ligging van de rechte schaal (figuur 81).

§ 138. Zijn de nummers van de twee stralen uit V en O door een bepaald punt P , x' en x'' (figuur 81), dan is, voor een transversaal door P , welke de kegelsnede snijdt in de schaalpunten x_1 en x_2 , volgens (109):

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) x' + x' x'' = 0. \quad (125)$$

Voor een andere transversaal door P , welke de kegelsnede in de schaalpunten x_3 en x_4 snijdt, is evenzoo:

$$x_3 x_4 - (x_3 + x_4) x' + x' x'' = 0. \quad (126)$$

§ 139. Ligt het punt P op OS , dan is $x'' = 0$ en volgt dus uit (125) en (126):

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \quad (127)$$

Wordt nu $x_4 = \infty$ genomen en de kegelsnedeschaal dus uit V op OS geprojecteerd, dan verkrijgen wij een nomogram voor:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}. \quad (128)$$

Den drager OS zullen wij daarom den **reciprokensom-drager** noemen.

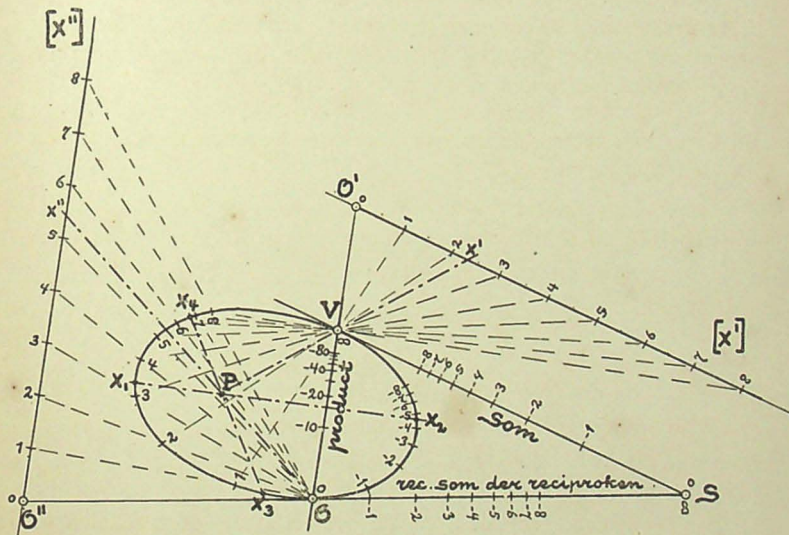


Fig. 81.

§ 140. Ligt P op VO , dan is $x' = 0$ en $x'' = \infty$ en volgt dus uit (125) en (126):

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 \quad (129)$$

Nemen wij nu $x_4 = 1$ en projecteeren dus de kegelsnedeschaal uit het schaalpunt 1 op VO , dan stelt het nomogram de betrekking:

$$x_1 x_2 = x_3 \quad (130)$$

voor. Den drager VO noemen wij daarom den **product-drager**.

§ 141. Ligt tenslotte P op VS , dan is $x' = \infty$ en volgt uit (125) en (126):

$$x_1' + x_2' = x_3 + x_4 \quad (131)$$

Nemen wij nu $x_4 = 0$ en projecteeren dus de kegelsnede-schaal uit **O** op VS, dan zal het nomogram de betrekking:

$$x_1 + x_2 = x_3 \quad (132)$$

voorstellen. Den drager VS noemen wij daarom den **somdrager**.

N.B. Wanneer op $[x']$ weer de schalen:

$$x_1' = f_1, \quad x_2' = f_2 \quad \text{en} \quad x_3' = f_3$$

en op $[x'']$ de schalen:

$$x_1'' = f_1 \quad \text{en} \quad x_2'' = f_2$$

worden geteekend, dan stellen wij dus, op de besproken wijzen, de betrekkingen voor:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_3}, \quad f_1 f_2 = f_3 \quad \text{en} \quad f_1 + f_2 = f_3.$$

§ 142. De betrekking (130) kan ook geschreven worden:

$$\ln x_1 + \ln x_2 = \ln x_3 \quad (133)$$

Zij ε een oneindig klein getal, dan is x^ε oneindig weinig verschillend van 1 en kan dus:

$$\ln x^\varepsilon = x^\varepsilon - 1$$

gesteld worden, of

$$\ln x = \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \quad (134)$$

en dus is (133) te herleiden tot:

$$x_1^\varepsilon + x_2^\varepsilon = x_3^\varepsilon + 1,$$

of eenigszins symbolisch geschreven:

$$x_1^\circ + x_2^\circ = x_3^\circ + 1. \quad (135)$$

Projecteeren wij de schalen op OS en VS eveneens uit het schaalpunt 1, dus nemen wij in de formules (127) en (131) $x_4 = 1$, dan verkrijgen wij op OS. VO en VS schalen, welke met het kegelsnede-schaalstel onderscheidenlijk nomogrammen vormen, voor dit karakteristieke drietal betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{-1} + x_2^{-1} &= x_3^{-1} + 1 \\ x_1^\circ + x_2^\circ &= x_3^\circ + 1 \\ x_1^{+1} + x_2^{+1} &= x_3^{+1} + 1 \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

§ 143. Uit (122) leiden wij af:

$$\left. \begin{aligned} x_{31} &= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + 4B} \\ x_{32} &= \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + 4B} \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

Naar gelang $A^2 + 4B$ dus positief, nul of negatief is, heeft de rechte drager $[x_3]$ twee, één of geen punten met de kegelsnede gemeen.

Is dus

$$B = -\frac{1}{4}A^2 \quad (138)$$

, dan raakt de rechte drager aan de kegelsnede in het schaalpunt $x = \frac{1}{2}A$.

§ 144. De reciprokensom-, product- en som-schaal op de dragers OS, OV en SV zijn projectieve schalen, zij worden dus regelmatig (figuur 82):

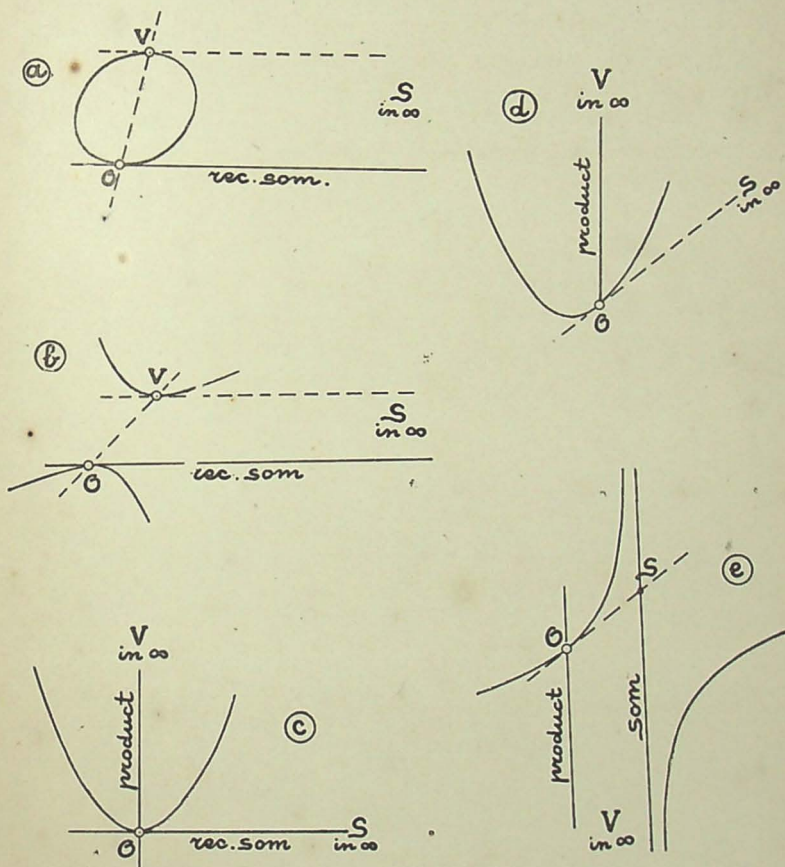


Fig. 82.

- 1^o. de reciprokensom-schaal op OS, als S in het oneindige ligt (figuren 82 a, b en c),
- 2^o. de product-schaal op OV, als V in het oneindige ligt (figuren 82 c, d en e) en
- 3^o. de som-schaal op SV, als SV // OV (figuur 82 e).

§ 145. Figuur 83 stelt het bijzondere nomogram voor, waarbij de drie genoemde schalen op OS, OV en SV geheel gelijk, en wel segmentair, zijn. De kegelsnede is hierbij weer een cirkel.

Wij zagen hierboven, dat op een en hetzelfde kegelsnedeschaalstel $[z_1, z_2]$ de som, het product en de reciprokensom van z_1 en z_2 , óf functies daarvan, te zamen door schalen kunnen worden voorgesteld.

Op een recht schalenstel is dat practisch niet mogelijk.

Naast de reeds opgesomde voordeelen van het kegelsnede-

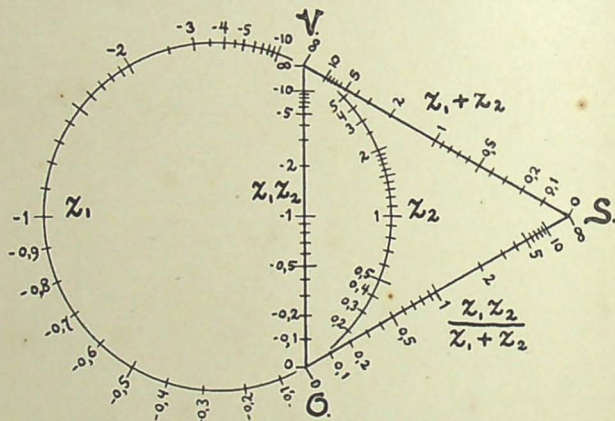


Fig. 83.

nomogram ten opzichte van het rechte nomogram (§ 133), is het bovengenoemde een nieuwe gunstige eigenschap.

§ 146. **Voorbeeld.** *Gemiddelden van a en b.* (figuur 84).

Er worden drie gemiddelden onderscheiden, n.l. het *rekenkundig* gemiddelde r , het *meetkundig* gemiddelde m en het *harmonisch* gemiddelde h . Onderscheidelijk zijn:

$$r = \frac{a+b}{2}, \quad m = \sqrt{ab} \quad \text{en} \quad h = \frac{2ab}{a+b}$$

, voorts is

$$m = \sqrt{rh}.$$

Worden a en b afgelezen op de als schalenstel beschouwde kegelsnedeschaal $[x]$, dan komt r op den somdrager, m op den productdrager en h op den reciprokensomdrager, dit laatste omdat

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Gemiddelden

van
a en b.

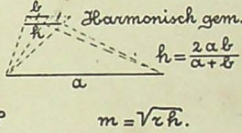
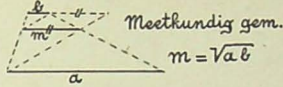
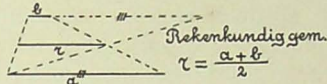
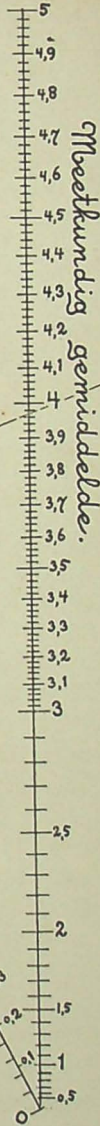
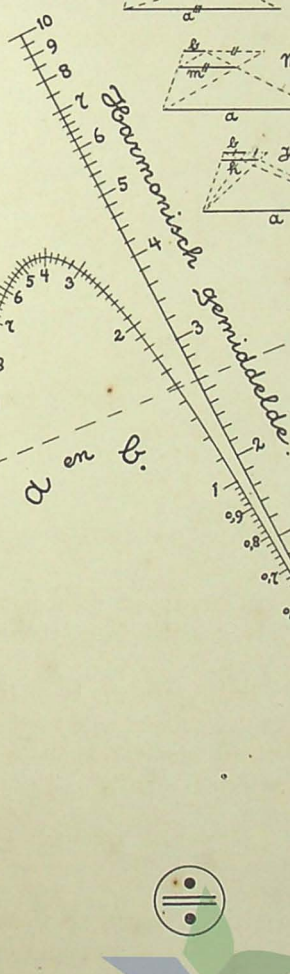
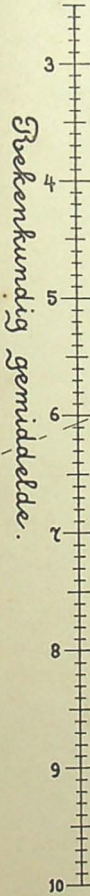


Fig. 84.

Daarom nemen wij product- en somdrager evenwijdig aan elkander en de hyperbolische schaal voor **a** en **b** daar tusschen in. Aldus verkrijgen wij het nomogram van figuur 84, met een regelmatige schaal voor **r** en een kwadratische schaal voor **m**, terwijl de projectieve schaal voor **h** in den oorsprong aan de kegelsnedeschaal raakt. Het vluchtpunt van de kegelsnedeschaal ligt in het oneindige, waardoor de drager van $[r]$ een asymptoot is van de hyperbool.

Door gebruik te maken van formule (134), kan worden aangetoond, dat de betrekkingen voor de drie gemiddelden, eveneens karakteristiek geschreven kunnen worden, als:

$$\left. \begin{aligned} a^{-1} + b^{-1} &= 2h^{-1} \\ a^{\circ} + b^{\circ} &= 2m^{\circ} \\ a^{+1} + b^{+1} &= 2r^{+1} \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

In figuur 84 is tevens aangegeven hoe in een trapezium met evenwijdige zijden **a** en **b**, de daaraan evenwijdige lijnen met een lengte **r**, **m** en **h** gelegen zijn.

Toepassing van het nomogram.

Zijn de gegeven getallen $a = 10,65$ en $b = 1,48$, dan vinden wij met behulp van het nomogram (gestippelde afleeslijn), voor het rekenkundig gemiddelde 6,065, voor het meetkundig gemiddelde 3,97 en voor het harmonisch gemiddelde 2,6.



HOOFDSTUK 21.

Kubische nomogrammen.

Theorie volgens Clark. ¹⁾

§ 147. De functievergelijking (IX) is symmetrisch ten opzichte van f_1 en f_2 . Naar analogie, stelt Clark de functievergelijking der kubische nomogrammen, als volgt symmetrisch ten opzichte van f_1 , f_2 en f_3 :

$$f_1 f_2 f_3 + A(f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1) + B(f_1 + f_2 + f_3) + C = 0 \quad (140)$$

Daar deze vergelijking van de 3e orde is, zijn alle andere functievergelijkingen van de 3e orde er toe herleidbaar.

Bij de afleiding van (IX) uit de formules (114), treedt evenals in § 115, de factor $(f_1 - f_2)$ op. Op overeenkomstige wijze laat Clark bij de kubische nomogrammen den factor:

$$W = (f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1) = \begin{vmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 \\ 1 & f_2 & f_2^2 \\ 1 & f_3 & f_3^2 \end{vmatrix}$$

optreden en verkrijgt door vermenigvuldiging van (140) met dezen factor, den determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & -A & +B & -C \\ 1 & f_1 & f_1^2 & f_1^3 \\ 1 & f_2 & f_2^2 & f_2^3 \\ 1 & f_3 & f_3^2 & f_3^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (141)$$

De onderdeterminanten van de eerste rij van (141) zijn n.l.:

$$f_1 f_2 f_3 W, (f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_1) W, (f_1 + f_2 + f_3) W \text{ en } W.$$

Door die eerste rij van de overige af te trekken, komt Clark ten slotte tot den determinant:

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & C \\ f_1 + A & f_1^2 - B & f_1^3 + C \\ f_2 + A & f_2^2 - B & f_2^3 + C \\ f_3 + A & f_3^2 - B & f_3^3 + C \end{vmatrix} = 0. \quad (142)$$

¹⁾ Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre" par Dr. J. Clark. Revue de Mécanique 1907-1908.

Daar de kolommen onderling verwisseld mogen worden, kunnen uit dezen determinant verschillende stellen vergelijkingen worden afgeleid. Uit de rangschikking (142) volgt bij voorbeeld:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{f_1 + A}{f_1^2 - B} + \psi = \frac{f_1^3 + C}{f_1^2 - B} \\ &\text{enz.} \end{aligned} \right\} \quad (143)$$

, waaruit dan met de constructieformules (84), gevonden wordt:

$$\text{voor } [z_1] \quad \left. \begin{aligned} p &= \mu' n \frac{f_1^2 - B}{f_1 + A} & q &= \mu' \frac{f_1^3 + C}{f_1 + A} \\ &\text{enz.} \end{aligned} \right\} \quad (144)$$

§ 148. Voorbeeld. $z_1 z_2 z_3 = 1$ (figuur 85).

Deze betrekking wordt uit (140) verkregen, door daarin $A = B = 0$,

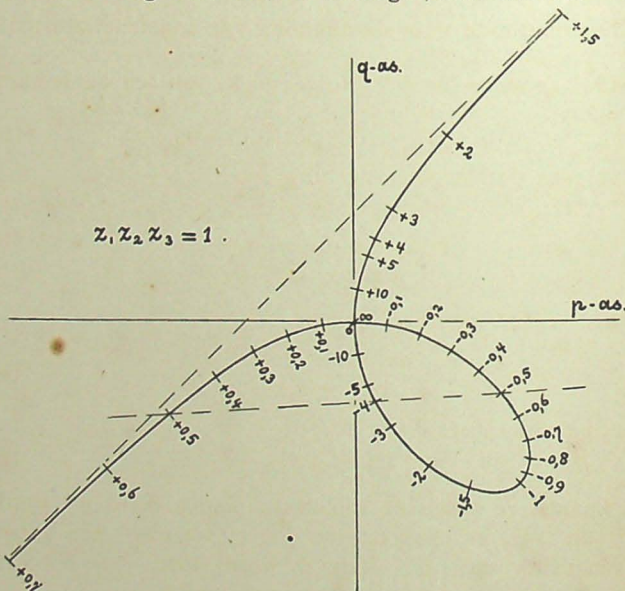


Fig. 85.

$C = 1$ en de functies gelijk aan de veranderlijken zelf te stellen. Schuiven wij bovendien in (142) de kolommen cyclisch één plaats naar rechts, dan verkrijgen wij het stel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \frac{z_1^3 - 1}{z_1} + \psi &= z_1 \\ &\text{enz.} \end{aligned} \right\}$$

en dus de constructieformules:

$$\text{voor } [z_1] \quad p = \mu' n \frac{z_1}{z_1^3 - 1} \quad q = \mu' \frac{z_1^2}{z_1^3 - 1}$$

enz.

, waaruit volgt:

$$\frac{q}{p} = \frac{z_1}{n}, \quad \text{enz.}$$

, terwijl, volgens (86), de vergelijking van den kubischen drager is:

$$n^3 q^3 - p^3 = \mu' n^2 p q.$$

De kromme is dus een *folium van Descartes*.

Toepassing van het nomogram.

$$0,5 \times (-4) \times (-0,5) = 1 \text{ (stippellijn).}$$

Andere methode voor de afleiding van constructieformules.

§ 149. Voor de wortels x_1 , x_2 en x_3 van een derdemachtsvergelijking:

$$x^3 + Sx^2 + Rx + P = 0 \quad (145)$$

geldt volgens de Hoogere Algebra

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -S \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= R \\ x_1 x_2 x_3 &= -P \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Snijden wij de kubische kromme

$$y = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}, \quad (147)$$

door een rechte afleeslijn

$$y = mx + n \quad (148)$$

, dan kunnen de abscissen van de snijpunten berekend worden, door y uit (147) en (148) te elimineeren, waardoor een vergelijking van den vorm (145) verkregen wordt, met:

$$S = \frac{b - b_1 m - a_1 n}{a - a_1 m}, \quad R = \frac{c - c_1 m - b_1 n}{a - a_1 m}, \quad P = \frac{d - c_1 n}{a - a_1 m}. \quad (149)$$

Na eliminatie van m en n uit de drie vergelijkingen (149), vinden wij een betrekking tusschen S , R en P , welke in determinantvorm geschreven kan worden als:

$$\begin{vmatrix} (a_1 S - b_1) & a_1 & (aS - b) \\ (a_1 R - c_1) & b_1 & (aR - c) \\ a_1 P & c_1 & (aP - d) \end{vmatrix} = 0 \quad (150)$$

4°. Wanneer β en γ nul zijn, kunnen er drie moduli μ_1 , μ_2 en μ_3 worden ingevoerd, mits $\mu_1\mu_2\mu_3 = 1$;

en wanneer α en β nul zijn, kunnen er drie termen λ_1 , λ_2 en λ_3 aan de functies worden toegevoegd, mits $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Zijn in de gegeven vergelijking (154) δ en nog twee van de drie overige coëfficiënten nul, dan kunnen de drie functies allen een zelfde modulus μ verkrijgen.

§ 151. **Voorbeeld.** *Verband tusschen toerental en omtrek-snelheid.* (figuur 86).

De voor te stellen betrekking is:

$$v = 2\pi r \frac{n}{60}$$

of, geschreven als de som van drie functies f_1 , f_2 en f_3 :

$$\log r + \log n + \left(\log \frac{\pi}{30} - \log v \right) = 0.$$

Wij kiezen als drager een S-vormige kromme, waarvoor de oorsprong symmetrie-punt is, dus nemen in (147):

$$b = d = b_1 = 0.$$

Uit de waarden van de onderdeterminanten volgt verder, dat $a_1 = 0$ is en c naar verkiezing kan worden aangenomen. De vergelijking van den drager wordt dus van den vorm.

$$y = ax^3 + cx.$$

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 86 namen wij de kromme:

$$y = 0,064 x^3 - 4,8 x$$

, omdat een gunstig gevormd gedeelte daarvan, besloten kon worden in het beschikbare teekenvlak, waarvoor $L \approx 32$ en $B \approx 20$ was.

Daar in de gegeven functievergelijking, volgens (154), de coëfficiënten α , β en δ nul waren, namen wij, volgens het gestelde in de vorige paragraaf onder 4°, voor de abscissen:

$$x_1 = \mu \log r + \lambda_1$$

$$x_2 = \mu \log n + \lambda_2$$

$$x_3 = \mu \left(\log \frac{\pi}{30} - \log v \right) + \lambda_3$$

, waarbij $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

NOTTROT, *Leerb. der Nomografie.*

Verband tusschen toerental
en omtreksnelheid.

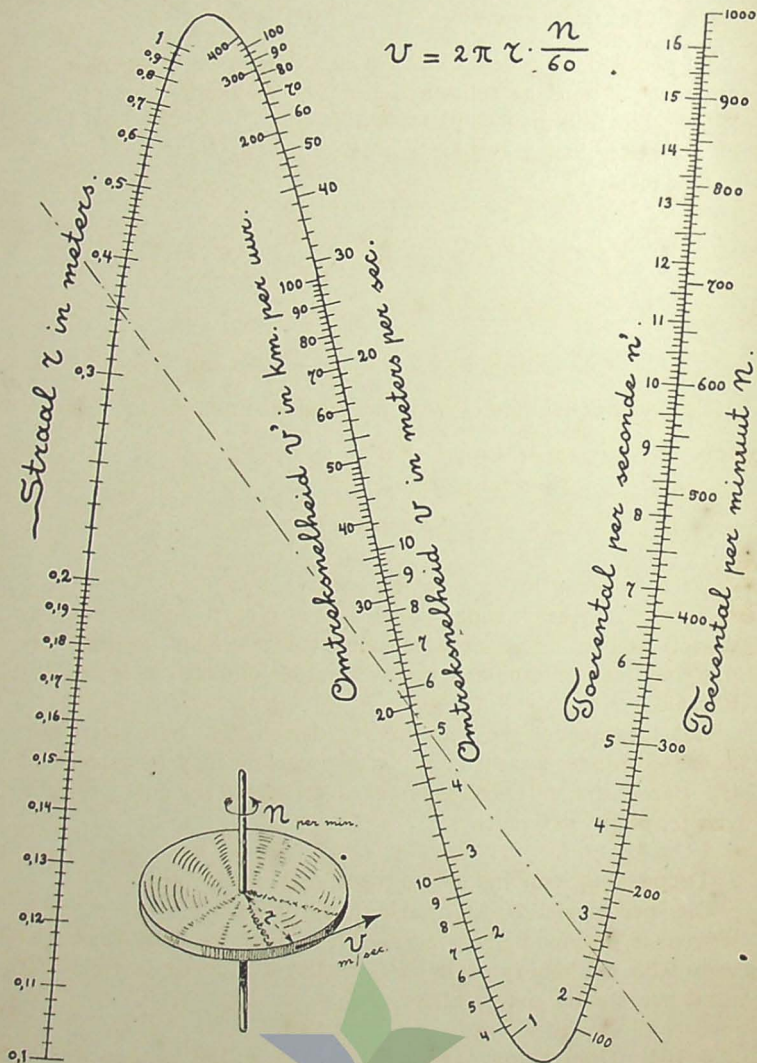


Fig. 86.

Het bereik van de veranderlijken was:

$$\begin{array}{l} r \text{ van } 0,1 \text{ tot } 1; \\ n \text{ " } 100 \text{ " } 1000; \\ v \text{ " } 1 \text{ " } 100. \end{array}$$

In verband met den vorm van den drager werd nagegaan, of het mogelijk was de schalen daarop zoo te kiezen, dat:

$$[r] \text{ reikte van } x = -10 \text{ tot } x = -6$$

en $[n]$ reikte van $x = 6$ tot $x = 10$.

Alsdan is:

$$\begin{array}{r} -\mu + \lambda_1 = -10 \\ \lambda_1 = -6 \\ 2\mu + \lambda_2 = 6 \\ 3\mu + \lambda_2 = 10 \end{array}$$

, waaruit volgt,

$$\mu = 4, \quad \lambda_1 = -6, \quad \lambda_2 = -2, \text{ en dus } \lambda_3 = 8.$$

De constructieformules voor de schalen waren dus:

$$\begin{array}{ll} \text{voor } [z_1] & x_1 = 4 \log r - 6 \\ \text{" } [z_2] & x_2 = 4 \log n - 2 \\ \text{" } [z_3] & x_3 = -4 \log v + 4 \log \frac{\pi}{30} + 8. \end{array}$$

De constructie had als volgt plaats:

Voor een reeks ronde waarden van r en n werden eerst x , daarna y bepaald en deze schaalpunten geteekend, daarna werden met een interpolator de overige deelpunten van $[r]$ en $[n]$ bepaald.

Het tusschengelegen gedeelte van den drager werd geteekend, door bij ronde waarden van x de waarde van y te berekenen. Op dezen drager, werd vervolgens de schaal $[v]$ door projectie van $[r]$ of $[n]$ verkregen.

Toepassing van het nomogram. (gestippelde afleeslijn).

Om per rijwiel 20 km. per uur, dat is ruim 5,5 m/sec., af te leggen, is het noodig, dat de wielen, welke een straal van ongeveer 0,35 m. hebben, ruim $2\frac{1}{2}$ maal per seconde of ruim 150 maal per minuut rondwentelen.

§ 152. **Opmerking.** De methode van § 150 kunnen wij op gelijke wijze toepassen op de vierdegraadsvergelijking:

$$x^4 + Sx^3 + Rx^2 + Qx + P = 0 \quad (155)$$

en de vierdegradskromme:

$$y = \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1} \quad (156)$$

Voorbeeld. Snijden wij b.v. de kromme

$$y = \frac{x^4 - 40x^2 + 144}{10x}$$

(figuur 87), door een rechte lijn $y = mx + n$, dan zijn er in het

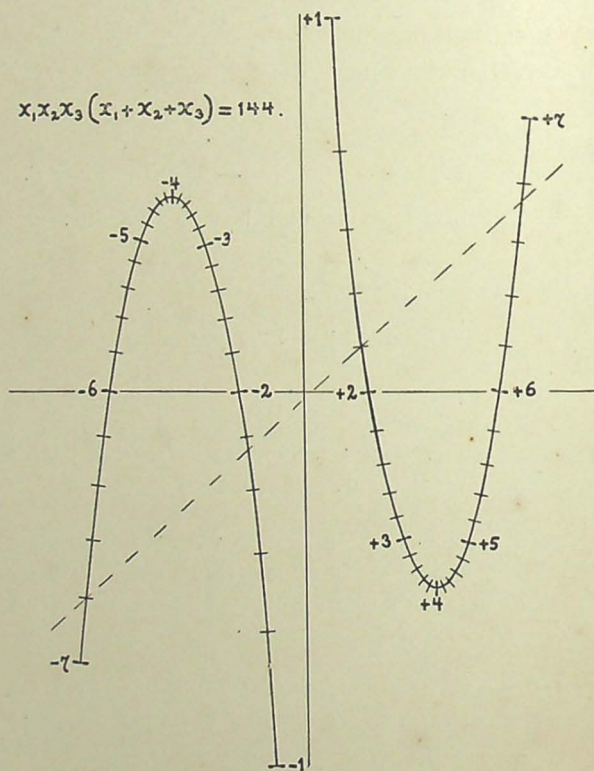


Fig. 87.

(Verkleining: $1/2 \times$).

algemeen vier snijpunten, welker abscissen de wortels zijn van de vergelijking

$$x^4 - (40 + 10m)x^2 - 10nx + 144 = 0.$$

Dus is voor die abcissen,

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\x_1 x_2 x_3 x_4 &= 144\end{aligned}$$

, waaruit de betrekking met drie veranderlijken volgt:

$$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = -144.$$

Daar deze vergelijking o.a. ten opzichte van x_3 van den 2den graad is, behooren bij elk stel waarden x_1 en x_2 in het algemeen 2 waarden x_3 .

Toepassing van het nomogram.

Voor $x_1 = -6,8$ en $x_2 = +1,8$ is (stippellijn):

$$x_3 = -1,74 \text{ en } = +6,74.$$



DEEL IV.

SCHEIDING DER VERANDERLIJKEN.

HOOFDSTUK 22.

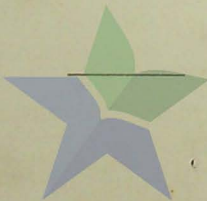
Inleiding.

§ 153. Onder de scheiding der veranderlijken eener vergelijking, wordt verstaan het herleiden van die vergelijking, tot den vorm van een der bijzondere functievergelijkingen (I) tot en met (IX), voor welke de wijze van constructie van het schaalnomogram, rechtstreeks werd aangegeven. [Zie ook Hoofdstuk 10 (blz. 55)].

Om die scheiding, bij de in de practijk voorkomende vergelijkingen, indien mogelijk, snel te kunnen uitvoeren, behandelen wij haar voor enkele **algemeene functievergelijkingen**, dat zijn functievergelijkingen van een zoodanigen vorm, dat een groot aantal vergelijkingen daartoe op het eerste gezicht herleidbaar is. Soms omvat zulk een algemeene functievergelijking alle door een schaalnomogram voor te stellen vergelijkingen van een orde, ze wordt dan de **algemeene functievergelijking van die orde** genoemd.

Voor elke vergelijking welke daarin begrepen is, kan de scheiding der veranderlijken plaats hebben, dit is niet steeds het geval bij de andere algemeene functievergelijkingen.

In de bij Hoofdstuk 10 behoorende tabel II (blz. 56 en 57), werd reeds een overzicht van de bijzondere en algemeene functievergelijkingen gegeven.



HOOFDSTUK 23.

5e en 6e orde.

§ 154.

$$\Phi_{12}g_3 + \Psi_{12} = f_3 \quad (a)$$

In deze algemeene functievergelijking zijn Φ_{12} en Ψ_{12} zoowel functies van z_1 als van z_2 .

Wij stellen:

$$\Phi_{12} = x \quad \text{en} \quad \Psi_{12} = y \quad (157)$$

en trachten achtereenvolgens z_1 en z_2 uit (157) te elimineeren. Gelukt dit en zijn de verkregen vormen lineair in x en y , dan is (a) gesplitst in het stelsel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} xg_1 + y &= f_1 \\ xg_2 + y &= f_2 \\ xg_3 + y &= f_3. \end{aligned} \right\} \quad (158)$$

Zijn de verkregen vormen niet lineair in x en y , dan is de scheiding in het algemeen niet mogelijk.

Mochten z_1 en z_2 niet uit (157) geëlimineerd kunnen worden, dan is toch scheiding niet uitgesloten. Wij kunnen hierop echter niet verder ingaan.

In het algemeene geval, waarin de functies g en f door niet-lineaire, en in de drie vergelijkingen verschillende, betrekkingen zijn verbonden, volgt, bij eliminatie van x en y uit (158), de functievergelijking (VII) voor het nomogram met drie kromme schalen:

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_2 - f_3}{g_2 - g_3} \quad (VII)$$

§ 155. Is er echter tusschen de twee functies van een der veranderlijken een lineaire betrekking, dan is de schaal voor die veranderlijke recht.

Is bij voorbeeld in (VII)

$$g_3 = af_3 + b$$

, dan kunnen wij de gegeven vergelijking herleiden tot het type (VIII)

$$\frac{F_1 - F_2}{G_1 - G_2} = F_3$$

, door te stellen:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{f_1}{af_1 + b - g_1} & G_1 &= \frac{1}{af_1 + b - g_1} \\ F_2 &= \frac{f_2}{af_2 + b - g_2} & G_2 &= \frac{1}{af_2 + b - g_2} \\ F_3 &= f_3 \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

§. 156 Zijn er in (VII) twee lineaire betrekkingen, dan zijn er twee rechte schalen.

Is bij voorbeeld:

$$g_1 = a_1 f_1 + b_1 \quad \text{en} \quad g_2 = a_2 f_2 + b_2$$

, dan kan de gegeven vergelijking herleid worden tot type (I):

$$F_1 G_3 + F_2 = F_3$$

door te stellen: ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{-1}{(a_1 - a_2)f_1 + (b_1 - b_2)} \\ F_2 &= \frac{1}{(a_1 - a_2)f_2 + (b_1 - b_2)} \\ F_3 &= \frac{1}{a_1 f_3 + b_1 - g_3} & G_3 &= \frac{a_2 f_3 + b_2 - g_3}{a_1 f_3 + b_1 - g_3} \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

§ 157. Zijn in twee of drie van de vergelijkingen (158) de functies g en f door *gelijkluidende* betrekkingen verbonden, dan liggen, zooals uit hoofdstuk 18 bekend is, de overeenkomstige schalen op denzelfden drager. Is er tusschen g_1 en f_1 en tusschen g_2 en f_2 een zelfde betrekking van den tweeden graad, dan wordt de gemeenschappelijke drager van $[z_1]$ en $[z_2]$ een kegelsnede. Alsdan valt de voor te stellen vergelijking onder de hierna te bespreken algemeene functievergelijkingen (b) en (c) van de 4e orde.

¹⁾ Zie, voor de afleiding van de formules (160), het voorbeeld in § 165.

HOOFDSTUK 24.

4e orde.

§ 158. De algemeene functievergelijking van de 4e orde is:

$$\Phi_{12} \xi_3 + \Psi_{12} = \zeta_3 \quad (b)$$

, waarin:

$$\Phi_{12} = \frac{a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3}{c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3} \quad \text{en} \quad \Psi_{12} = \frac{b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3}{c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3}$$

en waarin ξ_3 en ζ_3 niet lineair verwant mogen zijn.

$$\text{Stel weder} \quad \Phi_{12} = x \quad \text{en} \quad \Psi_{12} = y \quad (161)$$

en elimineer wederom z_1 en z_2 uit deze twee vergelijkingen.

Wij verkrijgen dan weer een stel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x\xi_1 + y &= \zeta_1 \\ x\xi_2 + y &= \zeta_2 \\ x\xi_3 + y &= \zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

Massau en *Clark* hebben aangetoond, dat er nu slechts twee gevallen mogelijk zijn:

1^o. Zoowel tusschen ξ_1 en ζ_1 , als tusschen ξ_2 en ζ_2 is een lineaire betrekking. Wij hebben dan voor de herleiding tot type (I) de formules (160) toe te passen.

2^o. Tusschen ξ_1 en ζ_1 en tusschen ξ_2 en ζ_2 is een gelijk-luidende betrekking van den tweeden graad.

In dit geval is $[z_1, z_2]$ een kegelsnedeschalenstel of dubbelschaal voor

$$\xi_1 = \xi_2 \quad \text{of} \quad \zeta_1 = \zeta_2 \quad (163)$$

, welke laatste betrekkingen tot elkander herleidbaar zijn.

Uit (163) kunnen wij ook afleiden

$$z_1 = \Phi_0(z_2) \quad \text{of} \quad z_2 = \Psi(z_1) \quad (164)$$

Stel in het algemeen een der betrekkingen (163) of (164), of

een andere daaruit af te leiden betrekking met gescheiden veranderlijken, voor door

$$f_1 = f_2 \quad (165)$$

en bereken daaruit de functies

$$z_1 = \varphi(f_1) \text{ en } z_2 = \psi(f_2). \quad (166)$$

Worden deze functies nu gesubstitueerd in de gegeven vergelijking van den vorm (b), dan kunnen wij daaruit een vergelijking van type (IX) afleiden:

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) \Phi_3 + \Psi_3 = 0 \quad (IX)$$

§ 159. Voorbeeld. *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.*

Voor de hierbij optredende betrekking

$$(1 + l)h^2 - l(1 + p)h - \frac{1}{3}(1 - l)(1 + 2p) = 0 \quad (167)$$

werd in § 127 een kegelsnedenomogram geconstrueerd.

Ter herleiding van (167) schrijven wij deze vergelijking in den vorm van de algemeene functievergelijking (b):

$$\frac{l}{1+l}(1+p)h + \frac{1-l}{3(1+l)}(1+2p) = h^2 \quad (168)$$

en stellen dus:

$$\frac{l}{1+l}(1+p) = x \text{ en } \frac{1-l}{3(1+l)}(1+2p) = y. \quad (169)$$

Eliminatie van p en l uit (169) en substitutie van x en y in (168) leveren het stel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x \cdot \frac{2(l-1)}{3l} + y &= \frac{l-1}{3(l+1)} \\ x \cdot \frac{2(2p+1)}{3(p+1)} + y &= \frac{2p+1}{3} \\ x \cdot h + y &= h^2 \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Deze zijn dus overeenkomstig (162). Uit de voor ξ_1 en ζ_1 , ξ_2 en ζ_2 in de plaats gekomen vormen valt af te leiden, dat voor beide veranderlijken een betrekking van den 2den graad aanwezig is:

$$\xi = \frac{4\zeta}{3\zeta + 1} \quad (171)$$

Voor de kegelsneden dubbelschaal $[z_1, z_2]$, is nu

$$\zeta_1 = \zeta_2$$

dus
$$\frac{l-1}{l+1} = 2p + 1$$

of
$$\frac{-1}{l+1} = p.$$

Stel dit
$$f_1 = f_2$$

, dan is dus

$$l = \frac{f_1 + 1}{-f_1} \quad \text{en} \quad p = f_2.$$

Dit in (167) gesubstitueerd, geeft:

$$-\frac{h^2}{f_1} + \frac{f_1 + 1}{f_1} (f_2 + 1) h - \frac{2f_1 + 1}{3f_1} (2f_2 + 1) = 0.$$

of:

$$f_1 f_2 (4 - 3h) - (f_1 + f_2) (3h - 2) + (3h^2 - 3h + 1) = 0$$

, dus als type (IX) en met substitutie van de uitdrukkingen voor f_1 en f_2 :

$$\frac{-1}{l+1} \cdot p - \left(\frac{-1}{l+1} + p \right) \frac{3h-2}{4-3h} + \frac{3h^2-3h+1}{4-3h} = 0 \quad (173)$$

§ 160. Elke vergelijking van type (IX) is tot een nieuwe vergelijking van dat type te vervormen. Zij de oorspronkelijke vergelijking

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + g_3 = 0$$

, dan gaat deze over in

$$F_1 F_2 - (F_1 + F_2) F_3 + G_3 = 0$$

door te stellen:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{af_1 + b}{cf_1 + d} & F_2 &= \frac{af_2 + b}{cf_2 + d} \\ F_3 &= \frac{(ad + bc)f_3 + acg_3 + bd}{d^2 + 2cdf_3 + c^2g_3} \\ G_3 &= \frac{b^2 + 2abf_3 + a^2g_3}{d^2 + 2cdf_3 + c^2g_3} \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

a, b, c en **d** zijn hierin naar keuze te bepalen coëfficiënten.

De formules (113) voor de verplaatsing van den oorsprong van het kegelsnedeschalenstel (blz. 179) zijn een bijzonder geval van de formules (174).

§ 161. *Soreau*¹⁾ geeft de volgende directe methode voor het

1) „Traité de Nomographie” Tome I pag. 234.

afleiden van de functie $z_1 = \varphi(f_1)$, als daarbij $z_2 = f_2$ is (zie de formules 166).

Schrijven wij de coëfficiënten van Φ_{12} en Ψ_{12} aldus onder elkaar:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

, — waarbij ter vermindering van breuken, de elementen van een rij met eenzelfde factor vermenigvuldigd mogen worden —, en noemen nu de determinant, welke wij na weglating van den kolom met indices 0 verkrijgen D_0 ; die na weglating van den kolom met indices 1, D_1 ; enz., dan is

$$z_1 = \frac{D_0 + D_1 f_1}{D_2 + D_3 f_1} \quad (175)$$

§ 162. **Voorbeeld.** *Overgang van rechthoekige op trapeziumvormige doorsnede bij grondkeerende muren.* (zie § 127 en § 159).

Uit (168) volgt voor de coëfficiënten:

lp	l	p	Const.
1	1	0	0
-2	-1	2	1
0	1	0	1

, waarbij de 1e en 3e rij door 3 werden gedeeld. De waarde der determinanten is dus:

$$D_0 = 2, \quad D_1 = 2, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = -2.$$

Bijgevolg is:
$$l = \frac{1 + f_1}{-f_1}.$$

§ 163. De algemeene functievergelijking van de 4e orde (b), kan ook geschreven worden, als:

$$f_1 f_2 (a_0 \xi_3 + b_0 - c_0 \zeta_3) + f_1 (a_1 \xi_3 + b_1 - c_1 \zeta_3) + f_2 (a_2 \xi_3 + b_2 - c_2 \zeta_3) + (a_3 \xi_3 + b_3 - c_3 \zeta_3) = 0 \quad (176).$$

, waarin ξ_3 en ζ_3 weer niet lineair verwant mogen wezen.

Wij kunnen dus de **algemeene functievergelijking van de 4e orde** ook schrijven:

$$f_1 f_2 F_3 + f_1 G_3 + f_2 H_3 + K_3 = 0 \quad (c)$$

, waarin F_3 , G_3 , H_3 en K_3 allen functies zijn van z_3 , waartusschen nu echter een verband behoort te bestaan:

$$\alpha F_3 + \beta G_3 + \gamma H_3 + K_3 = 0 \quad (177)$$

en K_3 niet nul mag wezen.

Was $K_3 = 0$, dan zou (c), bij deeling door $f_1 f_2 G_3$, overgaan in een vergelijking van type I of IV.

De scheiding der veranderlijken heeft nu als volgt plaats.

Trekken wij (177) van (c) af, dan verkrijgen wij de vergelijking:

$$(f_1 f_2 - \alpha) F_3 + (f_1 - \beta) G_3 + (f_1 - \gamma) H_3 = 0 \quad (178)$$

Stel $\beta\gamma - \alpha = \lambda$ (179)

, dan kan voor den factor $(f_1 f_2 - \alpha)$ geschreven worden:

$$(f_1 - \beta)(f_2 - \gamma) + \gamma(f_1 - \beta) + \beta(f_2 - \gamma) + \lambda$$

en dus voor (178):

$$(f_1 - \beta) \left(-\frac{G_3}{F_3} - \gamma \right) + (f_2 - \gamma) \left(-\frac{H_3}{F_3} - \beta \right) = (f_1 - \beta)(f_2 - \gamma) + \lambda. \quad (180)$$

Wij hebben nu (c) herleid tot het type:

$$F_1 \Phi_3 + F_2 \Psi_3 = F_1 F_2 + \lambda \quad (181)$$

, hetwelk als type (IX) is te schrijven als:

$$F_1 \cdot \frac{\lambda}{F_2} - \left(F_1 + \frac{\lambda}{F_2} \right) \frac{\lambda}{\Phi_3} + \frac{\lambda \Psi_3}{\Phi_3} = 0. \quad (182)$$

Voor $\beta\gamma - \alpha = \lambda = 0$, gaat (182) echter, na voorafgaande deeling door λ , over tot den vorm van type (I) of (IV):

$$\frac{1}{F_1} \cdot \frac{\Psi_3}{\Phi_3} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{\Phi_3}. \quad (183)$$

Substitueeren wij in (182) en (183), weer de functies en constanten waaruit (c), (177) en (179) zijn opgebouwd, dan verkrijgen wij onderscheidenlijk:

$$(f_1 - \beta) \cdot \frac{\lambda}{(f_2 - \gamma)} - \left(f_1 - \beta + \frac{\lambda}{f_2 - \gamma} \right) \cdot \frac{-\lambda F_3}{\gamma F_3 + G_3} + \lambda \frac{\beta F_3 + H_3}{\gamma F_3 + G_3} = 0 \quad (184)$$

$$\text{en } \frac{1}{f_1 - \beta} \cdot \frac{\beta F_3 + H_3}{\gamma F_3 + G_3} + \frac{1}{f_2 - \gamma} = \frac{-F_3}{\gamma F_3 + G_3} \quad (185)$$

De laatste vergelijking, wordt dus slechts verkregen, wanneer $\beta\gamma - \alpha = 0$.

Het is alleen in dit geval, dat een functievergelijking van type (I) of (IV) wordt verkregen. Vandaar, dat wij (I) en (IV) functievergelijkingen van de 4^o orde noemen. Hierbij is het kegelsnede-schalenstel in een recht schalenstel ontlaard.

§ 164. Uit (176) volgt, in verband met (177), het stel van 3 vergelijkingen met 3 onbekenden:

$$\left. \begin{aligned} a_0\alpha + a_1\beta + a_2\gamma + a_3 &= 0 \\ b_0\alpha + b_1\beta + b_2\gamma + b_3 &= 0 \\ c_0\alpha + c_1\beta + c_2\gamma + c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Schrijven wij, als in § 161, de coëfficiënten weer aldus op:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

en noemen wij weer de determinant, die na weglating van den kolom met indices 0 verkregen wordt, D_0 ; die na weglating van den kolom met indices 1, D_1 ; enz., dan is:

$$\alpha = -\frac{D_0}{D_3}, \quad \beta = \frac{D_1}{D_3} \text{ en } \gamma = -\frac{D_2}{D_3}. \quad (187)$$

Indien de grootte van α , β en γ niet op het eerste gezicht blijkt, kunnen deze waarden dus met de formules (186) of (187) worden bepaald.

§ 165. **Voorbeeld.** *Herleiding van een vergelijking type VII tot type I of IV, wanneer in VII:*

$$g_1 = a_1f_1 + b_1 \text{ en } g_2 = a_2f_2 + b_2.$$

(zie § 156).

$$\text{Alsdan is } \frac{f_1 - f_2}{(a_1f_1 + b_1) - (a_2f_2 + b_2)} = \frac{f_2 - f_3}{a_2f_2 + b_2 - g_3}$$

of volgens (c) geschreven:

$$f_1f_2(a_1 - a_2) + f_1(-a_1f_3 - b_2 + g_3) + f_2(a_2f_3 + b_1 - g_3) + (-b_1f_3 + b_2f_3) = 0 \quad (188)$$

, waarin dus:

$$\alpha(a_1 - a_2) + \beta(-a_1f_3 - b_2 + g_3) + \gamma(a_2f_3 + b_1 - g_3) + (-b_1f_3 + b_2f_3) = 0. \quad (189)$$

Uit (189) volgen de drie betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} -a_1\beta + a_2\gamma - b_1 + b_2 &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0 \\ (a_1 - a_2)\alpha - b_2\beta + b_1\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

, waaruit wij oplossen:

$$\beta = \gamma = -\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \text{ en } \alpha = \frac{(b_1 - b_2)^2}{(a_1 - a_2)}. \quad (191)$$

Dus is $\beta\gamma - \alpha = \lambda = 0$.

Na substitutie in (185), van de vormen voor F_3 , G_3 , H_3 , β en γ uit (188) en (191), verkrijgen wij dus de vergelijking van type I of IV:

$$\frac{-1}{(a_1 - a_2)f_1 + (b_1 - b_2)} \cdot \frac{a_2f_3 + b_2 - g_3}{a_1f_3 + b_1 - g_3} + \frac{1}{(a_1 - a_2)f_2 + (b_1 - b_2)} =$$

$$= \frac{1}{a_1f_3 + b_1 - g_3}. \quad (192)$$

N.B. Zie voor een andere toepassing § 175.



HOOFDSTUK 25.

3e orde.

§ 166. De algemeene functievergelijking van de 3de orde is:

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad (d)$$

Betrekkingen van dezen vorm, welke niet op het eerste gezicht tot een der bijzondere functievergelijkingen II, III, V of VI herleid kunnen worden, komen vrij veelvuldig voor.

Wij zullen eenige, zeer verschillende, methoden behandelen om de scheiding der veranderlijken, in vergelijkingen van dezen vorm, te voltrekken.

§ 167. ¹⁰. Met behulp van formules, verkregen door toepassing van de Stelling van Menelaos.

De scheiding van de veranderlijken heeft alsdan plaats volgens onderstaand, nader toe te lichten, schema: ¹⁾

(d) kan herleid worden tot:	$B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad (193)$
Is in (193) één van de coëff. B nul, dan (193) herleiden tot:	$f_2 f_3 + f_3 f_1 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad (194)$
Is in (194) $C_1 = C_2$, dan (194) herleiden tot:	$f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 + f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad (195)$
Zijn in (193) twee coëff. B nul, dan (193) herleiden tot:	$B_2 f_3 f_1 + f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (196)$

¹⁾ Waar twee verschillende functies van eenzelfde veranderlijke niet in direct verband met elkander staan, wordt in den loop der beschouwingen, als ook in

Kan de vergelijking, waarin wij de scheiding der veranderlijken tot stand willen brengen, niet dadelijk als (193) geschreven worden, dan moet zij tot dien vorm worden herleid:

a. Als in (d) een der coëfficiënten nul is, moet men de gegeven vergelijking deelen door de in den betreffenden term niet voorkomende functies. Is b.v. $C_2 = 0$ dan moet gedeeld worden door $f_1 f_3$.

b. Is geen der coëfficiënten van (d) nul, dan deelt men den eersten term door een van de drie volgende, b.v. door den derden term, men verkrijgt dan:

$$\frac{A f_2}{B_2}$$

Voor de verdere toelichting bepalen wij ons tot dit voorbeeld. Wij stellen nu

$$\frac{A f_2}{B_2} = \frac{A F_2}{B_2} - 1 \quad (197)$$

, waarin F_2 een nieuwe functie is, die uit (197) volgt. Deze betrekking kan ook geschreven worden:

$$f_2 = F_2 - \frac{B_2}{A}. \quad (198)$$

Bij substitutie van dezen vorm voor f_2 in (d) valt de derde term weg. Men kan dan verder volgens a handelen.

§ 168. *Scheiding van de veranderlijken in:*

$$B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \dots (193)$$

, waarin B_1, B_2 en $B_3 \neq 0$,

Wij passen de **stelling van Menelaos** (zie § 81) toe op figuur 88, waarbij de gestipstreepte afleeslijn als transversaal beschouwd wordt. Door de coëfficiënten van de op deze wijze verkregen vergelijking, gelijk te stellen aan de met een factor λ vermenigvuldigde coëfficiënten van (193), vinden wij de onderstaande vormen (200) en (201) voor λ en voor de 6 lengten m en s .

De tamelijk lange, maar eenvoudige berekeningen, welke hiertoe noodig zijn, laten wij buiten beschouwing.

dit schema, bij het overgaan van de eene op de andere functie, niet steeds een andere letter als symbool daarvoor gekozen. Zoo beteekenen in de functievergelijkingen (d) en (193) tot en met (196), f_1, f_2 of f_3 in het algemeen telkens andere functies van z_1, z_2 of z_3 . Op overeenkomstige wijze geldt het voorgaande voor de coëfficiënten B, C en D.

De scheiding der veranderlijken, in een vergelijking van den vorm (193), geschiedt nu als volgt:

Bereken de waarde:

$$Q = (B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3)^2 + 4B_2B_3(B_1D - C_2C_3) \quad (199)$$

, daarna de reële waarden λ uit:

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{Q}}{2B_1B_2B_3} \quad (200)$$

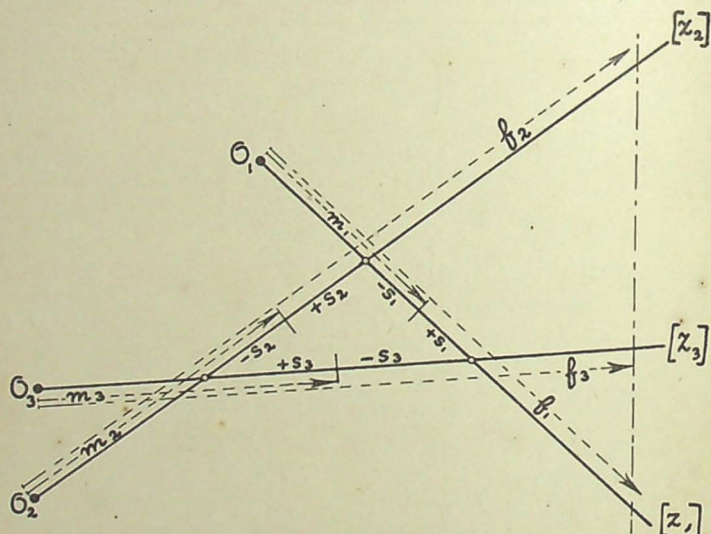


Fig. 88.

en vervolgens het stel waarden:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \lambda B_1 & m_1 &= \frac{B_1C_1 - B_2C_2 - B_3C_3}{2B_2B_3} \\ s_2 &= \lambda B_2 & m_2 &= \frac{-B_1C_1 + B_2C_2 - B_3C_3}{2B_3B_1} \\ s_3 &= \lambda B_3 & m_3 &= \frac{-B_1C_1 - B_2C_2 + B_3C_3}{2B_1B_2} \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Vergelijking (193) kan nu, met behulp van deze waarden, verformd worden tot een der vergelijkingen van de typen II, III, V of VI (zie tabel V). Daarbij zijn drie gevallen te onderscheiden, n.l. $Q > 0$; $Q = 0$ en $Q < 0$.

Tabel V.

Scheiding van de veranderlijken in: $B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0$, waarin B_1, B_2 en $B_3 \neq 0$.					
Wan- neer:	is de gegeven ver- gelijking		met de functies:		
	te vervormen tot:	type:	$F_2 =$	$F_2 =$	F_3 of $G_3 =$
$Q > 0$	$F_1 G_3 + F_2 = 0$	II	$\frac{f_1 - (m_1 - s_1)}{f_1 - (m_1 + s_1)}$	$\frac{f_2 - (m_2 + s_2)}{f_2 - (m_2 - s_2)}$	$\frac{f_3 - (m_3 - s_3)}{f_3 - (m_3 + s_3)}$
"	$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	V	$\frac{f_1 - (m_1 + s_1)}{-2s_1}$	$\frac{f_2 - (m_2 - s_2)}{-2s_2}$	$\frac{f_3 - (m_3 + s_3)}{2s_3}$
"	"	V'	$\frac{f_1 - (m_1 - s_1)}{2s_1}$	$\frac{f_2 - (m_2 + s_2)}{2s_2}$	$\frac{f_3 - (m_3 - s_3)}{-2s_3}$
$Q = 0$	$F_1 + F_2 = F_3$	III	$\frac{B_1}{f_1 - m_1}$	$\frac{B_2}{f_2 - m_2}$	$\frac{-B_3}{f_3 - m_3}$
"	$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	VI	$\frac{f_1 - m_1}{B_1}$	$\frac{f_2 - m_2}{B_2}$	$\frac{f_3 - m_3}{-B_3}$
$Q < 0$	$F_1 + F_2 = F_3$	III	$\text{bg.tg.} \frac{s_1}{f_1 - m_1}$	$\text{bg.tg.} \frac{s_2}{f_2 - m_2}$	$\text{bg.tg.} \frac{-s_3}{f_3 - m_3}$
"	$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$	VI	1	1	1
			$\text{bg.tg.} \frac{s_1}{f_1 - m_1}$	$\text{bg.tg.} \frac{s_2}{f_2 - m_2}$	$\text{bg.tg.} \frac{-s_3}{f_3 - m_3}$

Opmerking. (V') wordt, zooals uit de tabel blijkt, behalve met (52), uit (V) verkregen door omkeering van het teeken van s , als gevolg van de twee tegengestelde waarden van λ .

Voor het geval $Q < 0$, is voor het scheiden der veranderlijken gebruik gemaakt van de goniometrische betrekking

$$\text{tg } \gamma = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \text{tg } \beta}$$

, waarin $\gamma = \alpha + \beta$. Hieruit volgt, dat

$$f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 f_2 = 1 \quad (202)$$

te herleiden is tot:

$$\text{bg.tg} \left(\frac{1}{f_1} \right) + \text{bg.tg} \left(\frac{1}{f_2} \right) = \text{bg.tg} \left(-\frac{1}{f_3} \right). \quad (203)$$

§ 169. *Scheiding van de veranderlijken in*

$$f_2 f_3 + f_3 f_1 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0 \quad (194)$$

, waarin

$$C_1 \neq C_2.$$

Is in (193) één der coëfficiënten **B** nul, dan wordt die vergelijking tot (194) herleid, door de overblijvende coëfficiënten **B** in de twee niet-gemeenschappelijke functies van de bijbehorende termen op te nemen, dus **B**₂ in **f**₁ en **B**₁ in **f**₂; de coëfficiënten **C**₁ en **C**₂ worden daarna resp. door **B**₂ en **B**₁ gedeeld.

De herleiding van (194) is zeer eenvoudig, zij wordt rechtstreeks als type (II) geschreven in den vorm

$$\left(f_1 - \frac{C_2 C_3 - D}{C_1 - C_2}\right) \cdot \frac{f_3 + C_1}{f_3 + C_2} + \left(f_2 + \frac{C_1 C_3 - D}{C_1 - C_2}\right) = 0. \quad (204)$$

§ 170. *Scheiding van de veranderlijken in*

$$f_2 f_3 + f_3 f_1 + f_1 + f_2 + C_3 f_3 + D = 0. \quad (195)$$

Als in (194) $c_1 = c_2$, dan vermenigvuldigen wij alle termen met $\frac{1}{c_1}$ en nemen dezen factor in **f**₃ op, wij verkrijgen zoo (195).

Deze vergelijking wordt tot type (III) herleid door haar te schrijven

$$f_1 + f_2 = -\frac{c_3 f_3 + D}{f_3 + 1}. \quad (205)$$

§ 171. *Scheiding van de veranderlijken in*

$$B_2 f_3 f_1 + f_1 + f_2 + f_3 = 0 \quad (196)$$

Zijn in (193) twee coëfficiënten **B** nul, dan kunnen wij de gegeven vergelijking tot (196) herleiden door **C**₁ in **f**₁, **C**₃ in **f**₃ en **C**₂ en **D** in **f**₂ op te nemen.

De vergelijking (196) wordt als volgt geschreven als type (II):

$$(B_2 f_1 + 1) (B_2 f_3 + 1) + (B_2 f_2 - 1) = 0 \quad (206)$$

Met behulp van tabel III (blz. 112), kunnen de vergelijkingen (204), (205) en (206), ook tot den vorm van de andere bijzondere functievergelijkingen van de 3de orde worden herleid.

§ 172. *1e Voorbeeld. Instellen zonder matglas* (zie § 82 en figuur 43).

In het voorbeeld van § 82, voor een nomogram van type V, moesten de veranderlijken **v**₁, **v**₂ en **d** gescheiden worden in de vergelijking:

$$d = \frac{10 (v_2 - v_1) f^2}{\{200 v_1 v_2 - f (v_1 + v_2)\} \delta}$$

Wij herleiden dezen vorm eerst tot

$$\frac{f}{\delta d} = \frac{200 \frac{v_1}{f} \cdot \frac{v_2}{f} - \frac{v_1}{f} - \frac{v_2}{f}}{10 \frac{v_2}{f} - 10 \frac{v_1}{f}} \quad (207)$$

Overgang tot functies: ¹⁾

Stel:

$$\frac{v_1}{f} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f_1$$

$$\frac{v_2}{f} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f_2$$

en
$$\frac{f}{\delta d} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f_3$$

, dan gaat (207) over in:

$$f_3 = \frac{200f_1f_2 - f_1 - f_2}{10f_2 - 10f_1}$$

of

$$10f_2f_3 - 10f_3f_1 - 200f_1f_2 + f_1 + f_2 = 0$$

van den vorm (193), met:

$$\begin{array}{lll} B_1 = 10 & C_1 = 1 & \\ B_2 = -10 & C_2 = 1 & D = 0 \\ B_3 = -200 & C_3 = 0 & \end{array}$$

Dus is volgens (199) en (200)

$$Q = 20^2 \quad \text{en} \quad \lambda = \pm 0,0005$$

en volgens (201)

$$\begin{array}{ll} s_1 = \pm 0,005 & m_1 = 0,005 \\ s_2 = \mp 0,005 & m_2 = 0,005 \\ s_3 = \mp 0,1 & m_3 = 0 \end{array}$$

Voor tijpe V (en V') wordt dus volgens tabel V

$$F_1 = \frac{f_1 - (0,005 \mp 0,005)}{\mp 0,01} \quad F_2 = \frac{f_2 - (0,005 \pm 0,005)}{\pm 0,01}$$

$$F_3 = \frac{f_3 \pm 0,1}{\mp 0,2}$$

¹⁾ Het gebruik van dezelfde of bijna dezelfde letters voor uiteenlopende aanduidingen, zooals b.v. hier f voor den brandpuntsafstand en f₁ voor de functie van de 1e veranderlijke, komt in de Nomografie herhaaldelijk voor. Het is daarom aan te bevelen den overgang tot functies en den terugkeer tot de veranderlijken duidelijk aan te geven.

Wij nemen, om de functies zoo eenvoudig mogelijk te doen zijn, de onderste teekens, en dus:

$$F_1 = 100f_1 \quad F_2 = -100f_2 \quad F_3 = 5f_3 - 0,5$$

Terugkeer tot de veranderlijken:

$$\begin{aligned} F_1 & \dots \dots \dots \frac{100v_1}{f} \\ F_2 & \dots \dots \dots \frac{-100v_2}{f} \\ F_3 & \dots \dots \dots \frac{5f}{\delta d} - 0,5 \end{aligned}$$

, zoodat dus de oorsponkelijke vergelijking als type (V) wordt geschreven in den vorm:

$$\frac{1}{\frac{100v_1}{f} \cdot \left(\frac{5f}{\delta d} - 0,5\right)} + \frac{1}{\frac{100v_1}{f}} + \frac{1}{\frac{-100v_2}{f}} = \frac{1}{\frac{5f}{\delta d} - 0,5} \quad (208)$$

§ 173. 2de Voorbeeld. *Herleiding van*

$$f_1 f_2 - (f_1 + f_2) f_3 + (A f_3 + B) = 0 \quad (116)$$

tot de typen II, III, V of VI (zie blz. 189).

(116) wordt weer als (193) geschreven als:

$$-f_2 f_3 - f_3 f_1 + f_1 f_2 + A f_3 + B = 0 \quad (209)$$

, waarin dus:

$$\begin{aligned} B_1 &= -1 & C_1 &= 0 \\ B_2 &= -1 & C_2 &= 0 & D &= B. \\ B_3 &= 1 & C_3 &= A \end{aligned}$$

Dus is volgens (199) en (200)

$$Q = A^2 + 4B \quad \text{en} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pm (A^2 + 4B)} \quad (\text{reëel})$$

en volgens (201)

$$\begin{aligned} s_1 &= -\lambda & m_1 &= \frac{1}{2}A \\ s_2 &= -\lambda & m_2 &= \frac{1}{2}A \\ s_3 &= \lambda & m_3 &= \frac{1}{2}A \end{aligned}$$

Nu kan:

$$A^2 + 4B > 0, \quad A^2 + 4B = 0 \quad \text{of} \quad A^2 + 4B < 0 \quad \text{zijn.}$$

1^o. $A^2 + 4B > 0$.

Stel (zie 117) $\frac{1}{2}A + \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + B} = R'$
en $\frac{1}{2}A - \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + B} = R''$

, dan is:

$$\begin{aligned} m_1 + s_1 &= R'' & m_1 - s_1 &= R' \\ m_2 + s_2 &= R'' & m_2 - s_2 &= R' \\ m_3 + s_3 &= R' & m_3 - s_3 &= R'' \end{aligned}$$

en wordt dus (116) als type (II) geschreven:

$$\frac{f_1 - R'}{f_1 - R''} \cdot \frac{f_3 - R''}{f_3 - R'} - \frac{f_2 - R''}{f_2 - R'} = 0. \quad (210)$$

Daar echter λ ook de tegengestelde waarden mag hebben, is eveneens de schrijfwijze mogelijk:

$$\frac{f_1 - R''}{f_1 - R'} \cdot \frac{f_3 - R'}{f_3 - R''} - \frac{f_2 - R'}{f_2 - R''} = 0 \quad (211)$$

2^o. $A^2 + 4B = 0$.

Volgens tabel V, is (116) alsdan te schrijven in den vorm van type (III) of (VI):

$$\frac{1}{2f_1 - A} + \frac{1}{2f_2 - A} = \frac{1}{2f_3 - A}. \quad (212)$$

3^o. $A^2 + 4B < 0$.

Eveneens volgens tabel V, kan (116) in dit geval herleid worden tot type (III):

$$\text{bg tg } \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{2f_1 - A} + \text{bg tg } \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{2f_2 - A} = \text{bg tg } \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{2f_3 - A} \quad (213)$$

§ 174. 3e Voorbeeld. Een in techniek en wetenschap veel voorkomende formulevorm is

$$f_3 = \frac{af_1 + bf_2}{cf_1 + df_2} \quad (214)$$

Wij laten het aan den lezer over, met behulp van de formules (193), (194) en (204), de scheiding der veranderlijken uit te voeren en (214) te herleiden tot type (II):

$$f_1 \cdot \frac{a - cf_3}{b - df_3} + f_2 = 0 \quad (215)$$

Is $f_3 = z_3$, dan wordt $[z_3]$ regelmatig, wanneer μ_1 en μ_2 zóó gekozen worden, dat

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = m = -\frac{c}{d} \quad (216)$$

§ 175. 2^o. Scheiding van de veranderlijken met behulp van de algemeene functievergelijking (c.)

Met gebruikmaking van andere letters voor de coëfficiënten, schrijven wij (d):

$$m_0 f_1 f_2 f_3 + n_0 f_1 f_2 + m_1 f_1 f_3 + m_2 f_2 f_3 + n_1 f_1 + n_2 f_2 + m_3 f_3 + n_3 = 0 \quad (217)$$

of, in den vorm van (c):

$$f_1 f_2 (m_0 f_3 + n_0) + f_1 (m_1 f_3 + n_1) + f_2 (m_2 f_3 + n_2) + (m_3 f_3 + n_3) = 0. \quad (218)$$

Stellen wij nu in (177) $\alpha = 0$, dan vinden wij voor β en γ

$$\beta = \frac{m_2 n_3 - m_3 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1} \quad \lambda = \frac{m_3 n_1 - m_1 n_3}{m_1 n_2 - m_2 n_1}$$

Is β of γ nul, dan is $\lambda = 0$ en kan (218) herleid worden tot den vorm van type (I) of (IV), waarin alsdan een lineaire betrekking zal bestaan tusschen de twee functies van z_3 . Voor de verdere herleiding tot een der bijzondere functievergelijkingen van de 3de orde gebruiken wij dan de hierna volgende formules (219) of (220).

Zijn β en γ beiden ongelijk aan nul, dan is ook $\lambda \neq 0$ en kan (218) herleid worden tot (116), en verder met behulp van het in § 173 behandelde tot een der functievergelijkingen II, III, V of VI.

§ 176. Wanneer in een vergelijking van den vorm (I)

$$f_1 g_3 + f_2 = f_3$$

tusschen f_3 en g_3 een lineaire betrekking

$$g_3 = a f_3 + b$$

bestaat, dan kan die vergelijking herleid worden tot type (II)

$$F_1 G_3 + F_2 = 0$$

met:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= a f_1 - 1 & F_2 &= \frac{a}{b} f_2 + 1 \\ \text{en} & & G_3 &= \frac{a}{b} f_3 + 1 = \frac{g_3}{b} \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

, of tot type V (en V')

$$\frac{1}{F_1 F_3} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F_3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{met:} \\ \text{of met:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{af_1}, \quad F_2 = \frac{b}{af_2}, \quad F_3 = \frac{b}{af_3} \\ F_1 = \frac{af_1 - 1}{af_1}, \quad F_2 = \frac{af_2 + b}{-af_2}, \quad F_3 = \frac{af_3 + b}{-af_3} \end{array} \quad (220)$$

§ 177. **Voorbeeld.** *Instellen zonder matglas* (zie §§ 82 en 172 en figuur 43).

De functievergelijking was hierbij

$$10f_2f_3 - 10f_3f_1 - 200f_1f_2 + f_1 + f_2 = 0 \quad (221)$$

, of geschreven als (218):

$$f_1f_2(-200) + f_1(-10f_3 + 1) + f_2(10f_3 + 1) = 0$$

, bijgevolg zijn β , γ en dus ook $\lambda = 0$.

(221) gaat nu over in de vergelijking type (I):

$$\frac{1}{f_1} \cdot \frac{10f_3 + 1}{-10f_3 + 1} + \frac{1}{f_2} = \frac{200}{-10f_3 + 1} \quad (222)$$

Stel $\frac{10f_3 + 1}{-10f_3 + 1} = \Psi_3$ en $\frac{200}{-10f_3 + 1} = \Phi_3$, dan is daartusschen een lineair verband

$$\Psi_3 = a\Phi_3 + b$$

met $a = 0,01$ en $b = -1$.

Dus verkrijgt (222), bij overgang tot type (V), waarvoor wij gebruik maken van de formules (220), den vorm:

$$\frac{1}{100f_1} \cdot \frac{1}{5f_3 - 0,5} + \frac{1}{100f_1} + \frac{-1}{100f_2} = \frac{1}{5f_3 - 0,5}$$

§ 178. 3^o. **Scheiding van de veranderlijken door differentiëren ten opzichte van f_1 , f_2 en f_3 .**

Deze, door *Soreau* ook voor de 4^o orde uitgewerkte methode, berust hierop, dat wanneer in de vergelijking (d), verkort aangeduid met $E_{123} = 0$, en in de volgens type (III) geschreven vergelijking

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

, aan f_1 en f_2 aangroeiingen df_1 en df_2 worden toebedeeld, de daaruit voortvloeiende aangroeiing df_3 van f_3 moet volgen, zoolwel uit

$$E_1'df_1 + E_2'df_2 + E_3'df_3 = 0,$$

als uit

$$F_1'df_1 + F_2'df_2 + F_3'df_3 = 0$$

, waarin E_n' en F_n' de afgeleide functies voorstellen van E_{123} en van F_n ten opzichte van f_n .

Uit deze twee vergelijkingen volgt nu:

$$\frac{E_1'}{F_1'} = \frac{E_2'}{F_2'} = \frac{E_3'}{F_3'}$$

of ook

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{E_1'}{E_3'} \quad \text{en} \quad \frac{F_2'}{F_3'} = \frac{E_2'}{E_3'} \quad (223)$$

Voor (d) is dus:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{A f_2 f_3 + B_2 f_3 + B_3 f_2 + C_1}{A f_1 f_2 + B_1 f_2 + B_2 f_1 + C_3} \quad (224)$$

en

$$\frac{F_2'}{F_3'} = \frac{A f_1 f_3 + B_1 f_3 + B_3 f_1 + C_2}{A f_1 f_2 + B_1 f_2 + B_2 f_1 + C_3} \quad (225)$$

Substitueeren wij nu in (224) voor f_2 den voor deze functie uit (d) af te leiden vorm in f_1 en f_3 , en in (225) voor f_1 den daarvoor uit (d) af te leiden vorm in f_2 en f_3 , dan verkrijgen die vergelijkingen de gedaante:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{a_3 f_3^2 + b_3 f_3 + c_3}{a_1 f_1^2 + b_1 f_1 + c_1} \quad (226)$$

en

$$\frac{F_2'}{F_3'} = \frac{a_3 f_3^2 + b_3 f_3 + c_3}{a_2 f_2^2 + b_2 f_2 + c_2} \quad (227)$$

Hieruit volgt, dat de drie afgeleide functies F_1' , F_2' en F_3' zich verhouden, als de omgekeerden van de drie vierkantsvormen in f_1 , f_2 en f_3 . Daar in type III in de drie functies eenzelfde factor zou mogen worden opgenomen, mogen wij F_1' , F_2' en F_3' ook *gelijkstellen* aan de genoemde vierkantsvormen en is dus:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \int (a_1 f_1^2 + b_1 f_1 + c_1)^{-1} df_1 \\ F_2 &= \int (a_2 f_2^2 + b_2 f_2 + c_2)^{-1} df_2 \\ \text{en} \quad F_3 &= \int (a_3 f_3^2 + b_3 f_3 + c_3)^{-1} df_3 \end{aligned} \right\} \quad (228)$$

Om de uitkomsten van deze integralen te kunnen aangeven, stellen wij:

$$\sqrt{\pm (b^2 - 4ac)} = \lambda \quad (229)$$

, waarin λ alleen reëel mag zijn, en welke waarde, zooals bij volledige uitwerking der substitutie in (224) en (225) zou zijn gebleken, dezelfde is voor alle drie de functies F_1 , F_2 en F_3 .

De oplossing van de integraal is nu:

1^o. wanneer $a \neq 0$, is

$$\int (af^2 + bf + c)^{-1} df$$

als: gelijk aan:

$$\left. \begin{array}{l} b^2 - 4ac > 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda - (2af + b)}{\lambda + (2af + b)} + \text{Const.} \\ \frac{-2}{2af + b} + \text{Const.} \\ \frac{2}{\lambda} \text{bg tg } \frac{2af + b}{\lambda} + \text{Const.} \end{array} \right\} (230)$$

2^o. wanneer $a = 0$, is

$$\int (bf + c)^{-1} df = \frac{1}{b} \ln (bf + c) + \text{Const.} \quad (231)$$

Bij de scheiding verkrijgen wij dus de som van drie logarithmische, drie algebraïsche of drie cyclometrische functies, plus een constante. Deze laatste kan uit een willekeurige oplossing van de gegeven vergelijking worden bepaald.

§ 179. **Voorbeeld.** *Instellen zonder matglas* (zie §§ 82, 172 en 177 en figuur 43).

De scheiding moet uitgevoerd worden in de functievergelijking (221):

$$E_{123} = 10f_2f_3 - 10f_3f_1 - 200f_1f_2 + f_1 + f_2 = 0.$$

Hiervoor is:

$$E_1' df_1 = -10f_3 - 200f_2 + 1$$

$$E_2' df_2 = 10f_3 - 200f_1 + 1$$

$$E_3' df_3 = 10f_2 - 10f_1$$

en dus:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{-10f_3 - 200f_2 + 1}{10f_2 - 10f_1} \quad (232)$$

en

$$\frac{F_2'}{F_3'} = \frac{10f_3 - 200f_1 + 1}{10f_2 - 10f_1} \quad (233)$$

Uit (221) volgt verder:

$$f_2 = \frac{10f_3f_1 - f_1}{10f_3 - 200f_1 + 1} \quad (234)$$

en

$$f_1 = \frac{10f_2f_3 + f_2}{10f_3 + 200f_2 - 1} \quad (235)$$

(234) in (232) en (235) in (233) gesubstitueerd, geeft:

$$\frac{F_1'}{F_3'} = \frac{100f_3^2 - 1}{-2000f_1^2 + 20f_1} \quad \text{en} \quad \frac{F_2'}{F_3'} = \frac{100f_3^2 - 1}{2000f_2^2 - 20f_2}$$

Daaruit volgt voor de coëfficiënten **a**, **b** en **c** van de integraalvormen (228):

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
voor F_1	-2000	20	0
„ F_2	2000	-20	0
„ F_3	100	0	-1

Bijgevolg is voor alle drie functies

$$b^2 - 4ac = 400 \quad \text{en dus} \quad \lambda = 20.$$

En dus is:

$$F_1 = \frac{1}{20} \ln \frac{100f_1}{1 - 100f_1} + \text{Const.}$$

$$F_2 = \frac{1}{20} \ln \frac{1 - 100f_2}{100f_2} + \text{Const.}$$

$$F_3 = \frac{1}{20} \ln \frac{1 - 10f_3}{1 + 10f_3} + \text{Const.}$$

Dus is:

$$\ln \frac{100f_1}{1 - 100f_1} + \ln \frac{1 - 100f_2}{100f_2} + \ln \frac{1 - 10f_3}{1 + 10f_3} + \text{Const.} = 0. \quad (236)$$

Uit (221) volgt nog, dat voor f_1 en $f_2 = \infty$ ook $f_3 = \infty$. Dus is de constante in (236) gelijk aan nul en wordt de betrekking (221) als type (II) geschreven:

$$\frac{100f_1}{100f_1 - 1} \cdot \frac{10f_3 - 1}{10f_3 + 1} + \frac{100f_2}{100f_2 - 1} = 0 \quad (237)$$

, welke vergelijking met behulp van tabel III tot type (V) wordt gevormd als:

$$\frac{1}{100f_1} \cdot \frac{1}{5f_3 - 0,5} + \frac{1}{100f_1} + \frac{-1}{100f_2} = \frac{1}{5f_3 - 0,5}$$

DEEL V.

AANVULLENDE HOOFDSTUKKEN.

HOOFDSTUK 26.

Voorstelling van grensbetrekkingen door stop-, toegangs- en waarschuwinglijnen.

§ 180. **Grensbetrekking.** Bij de voorstelling van een betrekking door een nomogram wordt de toepassing van die betrekking steeds begrensd door het bereik dat men voor de veranderlijken heeft gekozen. Het komt dikwijls voor dat er daarenboven nog een of meer *grensbetrekkingen* zijn. Hieronder verstaan wij betrekkingen tusschen twee van de drie veranderlijken, meestal voorgesteld door een vergelijking, waarvan het tweede lid een getal is. Alsdan geldt de door het nomogram voorgestelde betrekking slechts voor die waardestellen, waarvoor het eerste lid van de grensbetrekking hetzij grooter, hetzij kleiner dan dat getal is.

Als voorbeeld nemen wij de knikformules van *Euler* en *Tetmajer* voor ronde vurenhouten stutten (zie figuur 90). De grensbetrekking is hier

$$\frac{d}{l} = 4$$

, waarbij d de dikte van den paal in cm. en l de lengte daarvan in m. is. De formule van *Euler* geldt dan voor $\frac{d}{l} < 4$, die van

Tetmajer voor $\frac{d}{l} \geq 4$.

Buitendien is er nog een grensbetrekking

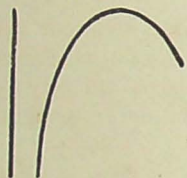
$$\frac{P}{d^2} > 47$$

, waarin P de toe te laten belasting is in kg. Deze grensbetrekking, voortvloeiende uit den eisch, dat de toe te laten druk per cm^2 paaldoorsnede niet mag worden overschreden, behoeft echter in figuur 90 niet te worden voorgesteld, daar het bereik der

veranderlijken — en de eerstgenoemde grensbetrekking — de toepassing van het nomogram reeds enger beperken.

§ 181. **Stoplijn en toegangslijn.** In Hoofdstuk 4 zagen wij, dat een betrekking tusschen twee veranderlijken op een schalenstel wordt weergegeven door een raakkromme of door een enkel punt.

Stoplijnen.



Toegangslijn.



Waarschuwinglijnen.



Fig. 89.

Wordt de grensbetrekking door een raakkromme weergegeven, dan zal het voor de afleeslijnen toegankelijke gebied aan de *bolle* of aan de *holle* zijde van die raakkromme kunnen liggen. Zooveel mogelijk moet getracht worden de eerstgenoemde ligging te verkrijgen. De raakkromme wordt dan zoo noodig tot buiten het nomogram verlengd en dik ge-

Beschouwen wij laatstgenoemd geval het eerst.

Wanneer de grensbetrekking wordt weergegeven door een enkel punt, dan verbinden wij dit met een punt buiten het afleesgebied door een rechte of gebroken zoogenaamde *stoplijn*. (Fransch: arrêt). De toepassing van het nomogram wordt dan in zooverre begrensd, dat *de afleeslijn deze stoplijn niet mag snijden*.

Naar welke zijde de stoplijn getrokken moet worden, volgt onmiddellijk uit een beschouwing van het nomogram in verband met het teeken $<$ of $>$ in de grensbetrekking.

De stoplijn wordt in het nomogram geteekend als een zeer dikke lijn (figuur 89).

Wordt de grensbetrekking door een raakkromme weergegeven, dan zal het voor de afleeslijnen toegankelijke gebied aan de *bolle* of aan de *holle* zijde van die raakkromme kunnen liggen.

trokken. Ze is dan weer een stoplijn, die door de afleeslijn niet mag worden gesneden (figuur 89).

Ligt het toegankelijke gebied aan de *holle* zijde, dan wordt de, — c.q. verlengde —, raakkromme geteekend als een dikke streepjeslijn, gekruist door een pijltje (figuur 89). Wij noemen haar dan *toegangslijn*, omdat de *afleeslijn* deze *toegangslijn* steeds zal moeten snijden. Een toegangslijn is dus altijd een gebogen lijn.

§ 182. **Waarschuwinglijn.** Het komt ook wel eens voor, dat men over een zeker bereik van het nomogram, afgebakend door bekende schaalwaarden of grensbetrekkingen, wil verwijzen naar aanvullende betrekkingen, veelal eveneens door nomogrammen voorgesteld

Op ongeveer dezelfde wijze als voor de stoplijnen is uiteengezet, worden dan *waarschuwinglijnen* geteekend. Zij worden als dikke streepjeslijnen getrokken (figuur 89).

Bij de waarschuwinglijnen is meestal, bij de stoplijnen soms, een Romeinsch cijfer geplaatst, als verwijzing naar een als nomogram of op andere wijze voorgestelde vervangende of aanvullende betrekking, welke toegepast moet worden wanneer de afleeslijn de stoplijn of waarschuwinglijn zou snijden.

§ 183. **1e Voorbeeld.** *Berekening van ronde vurenhouten stutten* (figuur 90).

I. Voor $\frac{d}{l} < 4$ is volgens *Euler*: $P = \frac{d^4}{2l^2}$;

II. Voor $\frac{d}{l} \geq 4$ is volgens *Tetmajer*: $P = 24 (d^2 - 2,648 ld)$,

waarin: d = de dikte in cm.
 l = de lengte in m.
 P = de toe te laten belasting in kg.

De constructie van I had, in de oorspronkelijke tekening van figuur 90, plaats met de volgende drie evenwijdige schalen:

$$\begin{aligned} [d] & \dots \dots \dots x = 20 \log d \\ [l] & \dots \dots \dots y = -20 \log l \\ [P] & \dots \dots \dots q = \frac{10}{3} (\log P + \log 2). \end{aligned}$$

De constructie van II geschiedde met twee evenwijdige regelmatige schalen:

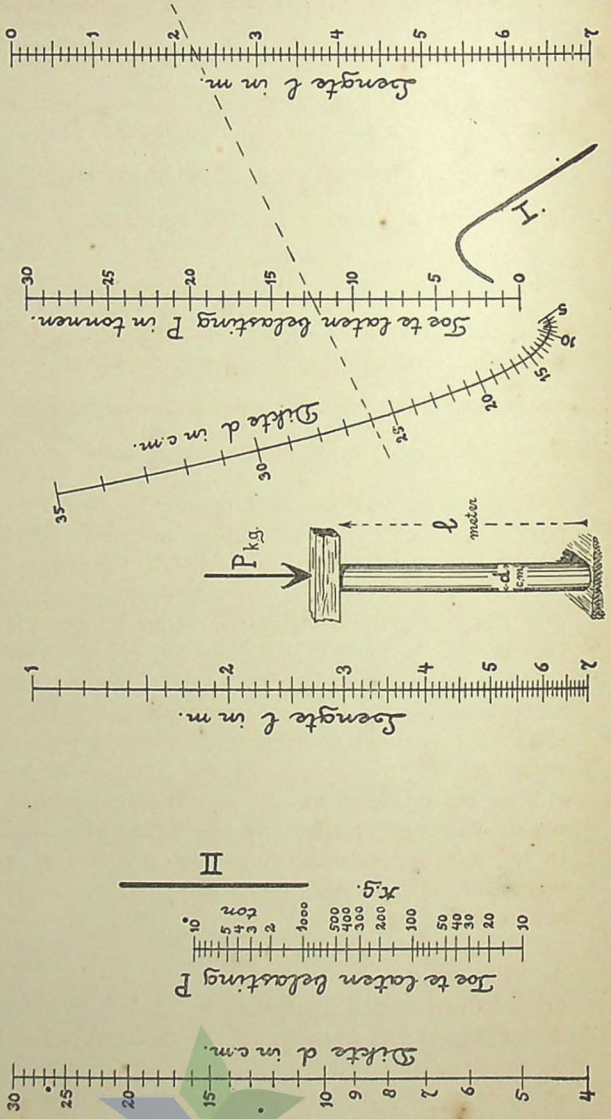
$$\begin{aligned} [P] & \dots \dots \dots x = 0,5 P \\ [l] & \dots \dots \dots y = -2,5 l \end{aligned}$$

, terwijl de kromme schaal $[d]$ grootendeels geconstrueerd kon worden met de betrekkingen:

Berekening van ronde vurenhouten stutten,

I, voor $\frac{d}{l} < 4$ volgens
 Euler: $P = \frac{d^4}{2l^2}$

met ongev. 10 voud. zekerheid, II, voor $\frac{d}{l} \gg 4$ volgens
 Tetmajer: $P = 24(d^2 - 2,648ld)$.



$$\begin{aligned} \text{voor } l = 0 \text{ is } P &= 24 d^2 \\ \text{,, } P = 0 \text{ is } d &= 2,648 l. \end{aligned}$$

De grensbetrekking $\frac{d}{l} = 4$ wordt in nomogram I voorgesteld door het onderste punt van de stoplijn. Deze is vandaar naar boven getrokken tot buiten het gebied der afleeslijnen. Voor alle waardestellen waarbij $\frac{d}{l} > 4$ is, houdt de stoplijn dus de afleeslijnen tegen en verwijst naar nomogram II.

In nomogram II wordt de grensbetrekking $\frac{d}{l} = 4$ voorgesteld door een raakkromme op het schalenstel $[d, l]$. Deze raakkromme wordt met een recht stuk verlengd tot beneden de schaal-einden en is dan de stoplijn, die voor alle waardestellen waarbij $\frac{d}{l} < 4$ is, de afleeslijnen opvangt en verwijst naar nomogram I.

Toepassing van het nomogram. Voor een ronde vuren houten paal van 26 cm. dikte en 2,25 m. lengte, is de toe te laten belasting volgens *Tetmajer* 12,5 ton (zie stippelijijn).

§ 184. **2e Voorbeeld.** *Grondverzet bij den aanleg van wegen.* (figuur 91).

Dit voorbeeld is gekozen in navolging van *d'Ocagne*. Voor het wegprofiel zijn echter andere afmetingen aangenomen, terwijl ook de uitvoering van het nomogram in meerdere opzichten belangrijk verschilt.

Voor het opmaken van de voor te stellen betrekkingen, bezigen wij de volgende notaties (zie ook figuur 91), waarbij alle lengten in m., alle oppervlakken in m² gemeten worden en de voor het wegprofiel aangenomen waarden tusschen haakjes zijn bijgeschreven (zie figuur 92).

de halve wegbreedte = **b** (6 m)
 de breedte van den greppel = **s** (2 m)
 de lengte van het buitentalud van den greppel = **l** . (0,85 m)
 de oppervlakte van het profiel van den greppel = **δ** (0,75 m²)
 de helling van het talud der ophooging = **tg φ** . . (2/3)
 de helling van het talud der afgraving = **tg φ'** . . (1)
 en voorts:
 de insteek der ophooging = **ε**.

de insteek der afgraving = ε' .

de insteek van het driehoekig deel van het profiel = a ,

de lengte van het talud der ophooging = L .

de lengte van het talud der afgraving = L' .

het terreinpeil ten opzichte van den wegbovenkant = z .

de terreinhelling = $\text{tg } \Phi$.

(steigend—positief, dalend—negatief).

het profielloppervlak van de ophooging = O .

het profielloppervlak van de afgraving = A .

het driehoekig deel van het profiel = C .

Voor de waarden O , A en C geldt, dat alle profielen van afgraving, — dus van uitkomenden grond —, positief; daarentegen alle profielen van ophooging, — dus van bij te storten grond —, negatief in rekening gebracht worden.

Bij een ligging van het terreinoppervlak ten opzichte van den wegbovenkant, waarbij zoowel afgraving als ophooging voorkomen, is dus O of A de algebraïsche som van die gedeeltelijke profielen.

Al naar gelang wij het wegprofiel in ophooging (zónder greppel) of in ingraving (mét greppel), dan wel alleen het driehoekig profielgedeelte beschouwen (figuur 92), kunnen wij de volgende betrekkingen afleiden:

I. Weg in ophooging (figuur 92a).

In $\triangle ABC$ is:

$$(-z + b \text{tg } \varphi) \cdot \varepsilon = -2O + b^2 \text{tg } \varphi$$

$$-z + b \text{tg } \varphi = \varepsilon (\text{tg } \Phi + \text{tg } \varphi)$$

$$\varepsilon = b + L \cos \varphi$$

, of met de waarden, aangenomen voor het gekozen wegprofiel:

$$(-z + 4) \cdot \varepsilon = -2O + 24$$

$$-z + 4 = \varepsilon (\text{tg } \Phi + 2/3)$$

$$\varepsilon = 6 + 0,832 L.$$

II. Weg in ingraving (figuur 92b).

In $\triangle ABC$ is:

$$\{z + (b + s) \text{tg } \varphi'\} \cdot \varepsilon' = 2A + (b + s)^2 \text{tg } \varphi' - 2\delta$$

$$z + (b + s) \text{tg } \varphi' = \varepsilon' (\text{tg } \varphi' - \text{tg } \Phi)$$

$$\varepsilon' = (L' - l) \cos \varphi' + b + s$$

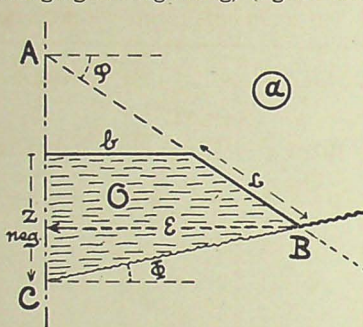
, of, voor het gekozen wegprofiel:

$$(z + 8) \cdot \varepsilon' = 2A + 62,5$$

$$z + 8 = \varepsilon' (1 - \text{tg } \Phi)$$

$$\varepsilon' = 0,707 L' + 7,4.$$

III. **Driehoekig deel van het profiel** (bij gedeeltelijke ophooging en afgraving) (figuur 92c).



$$a = -z \cotg \Phi$$

$$2C = -z^2 \cotg \Phi$$

Voor de drie nomogrammen werden, in de oorspronkelijke tekening voor figuur 91, de volgende schalen gebezigd:

Voor I:

$$x = 25 \log (-z + 4)$$

$$y = 12,5 \log \epsilon$$

$$q = 18\frac{1}{3} \log (-20 + 24)$$

$$q' = -25 \log (\operatorname{tg} \Phi + \frac{2}{3})$$

$$y = 12,5 \log (6 + 0,832 L)$$

Voor II:

$$x = 40 \log (z + 8)$$

$$y = 20 \log \epsilon'$$

$$q = 13\frac{1}{3} \log (2A + 62,5)$$

$$q' = -40 \log (1 - \operatorname{tg} \Phi)$$

$$y = 20 \log (0,707 L' + 7,4)$$

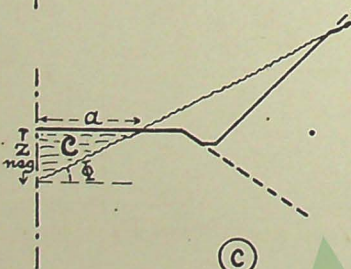
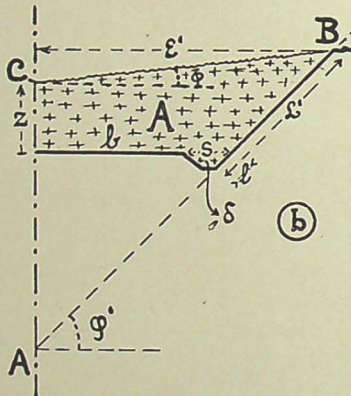
Voor III:

$$x = 10 \log z$$

$$y = -7,5 \log \operatorname{tg} \Phi$$

$$q = 3 \log 2C$$

$$q' = \frac{30}{7} \log a$$



De gestippelde afleeslijnen in de nomogrammen I en II leveren de volgende waarden, behorende bij de in het nomogram geteekende toelichtende figuren:

Ophooging: $z = -3,3$ m.;

$\operatorname{tg} \Phi = 0,07$ en dus $\epsilon = 9,9$ m.;

$L = 4,7$ m. ; Profiel = $-24,2$ m².

Afgraving: $z = 2,7$ m.;

$\operatorname{tg} \Phi = -0,09$ en dus $\epsilon' = 9,8$ m.;

$L' = 3,4$ m. ; Profiel = $21,2$ m².

Fig. 92.

In figuur 93 zijn de zes gevallen, welke zich kunnen voordoen, met daarachter de aanwijzingen voor de toepassing der drie nomogrammen, aangegeven.

Hieruit is de ligging van de benodigde stop- en waarschuwinglijnen af te leiden. Wij zullen deze lijnen bespreken in de volgorde waarin zij in figuur 91 van links naar rechts voorkomen.

Te bepalen oppervlakken; in geval:

№	Profiel:	met		
		Nom. I $\sigma =$	Nom. III $c =$	Nom. II. $A =$
1		σ_1	—	—
2		$A_2 + \sigma_1$	A_2	—
3		$A_2 + \sigma_1$	A_2	$A_2 + \sigma_1 + A_3$
4		σ_1	—	$\sigma_1 + A_3$
5		—	σ_2	$\sigma_2 + A_3$
6		—	—	A_3

ε en σ zijn steeds te bepalen met Nom. I, ε' en σ' met Nom. II en a met Nom. III.

Fig. 93.

a. Wanneer het terreinoppervlak den wegbovenkant snijdt, is er een driehoekig deel van het profiel en moet daarvoor nomogram III gebruikt worden.

Dit is bij de toepassing van nomogram I het geval, wanneer z positief en $\varepsilon > 6$ is (geval n^o. 2). De naar nomogram III verwijzende waarschuwinglijn is dus de verbindingslijn van $z = 0$ en $\varepsilon = 6$.

b. Het talud der ophooging kan door het terreinoppervlak niet binnen 6 m. afstand van de wegas gesneden worden. Wél het verlengde van dat talud (gevallen nrs. 5 en 6), maar dan hebben wij te maken met het profiel van den weg in afgraving en moet dus nomogram II gebruikt worden. Vandaar de stoplijn in nomogram I, opwaarts getrokken van het punt $\varepsilon = 6$ en verwijzend naar nomogram II.

c. Als grens tusschen de gevallen nrs. 1 en 4 nemen wij die ligging van het terreinoppervlak aan, waarbij dit door den voet van het binnentalud van den greppel gaat. Alsdan is voor het gekozen wegprofiel $\varepsilon = 6,9$ m. Voor $\varepsilon < 6,9$ moet dus, behalve nomogram I ook nomogram II toegepast worden. De waarschuwinglijn in nomogram I geeft dit aan.

d. Een driehoekig deel van het profiel is slechts aanwezig, wanneer $a = -z \cotg \Phi < 6$ is (gevallen nrs. 2, 3 en 5), want deze insteek **a** van het driehoekig gedeelte kan niet grooter zijn dan de halve wegbreedte, dat is hier 6 m. De naar nomogram I of II verwijzende stoplijn, is dus van het punt $a = 6$ in bovenwaartsche richting getrokken.

e. Het talud der afgraving ligt met zijn voet op 7,4 m. afstand van de wegas. Het terreinoppervlak snijdt dit talud dus steeds met een insteek $\varepsilon' > 7,4$.

Wel kan het verlengde van dat talud, op kleineren afstand dan 7,4 m. uit de wegas, door het terreinoppervlak gesneden worden (gevallen nrs. 1 en 2), maar dan ligt de weg in ophooging. De stoplijn in nomogram II van het punt $\varepsilon' = 7,4$ benedenwaarts getrokken, verwijst dus naar nomogram I.

f. Wanneer $-z \cotg \Phi > 6$ en $\varepsilon' > 7,4$ is (geval n^o. 4), moet, behalve nomogram II, ook nomogram I geraadpleegd worden. De grensbetrekking $-z \cotg \Phi = 6$ wordt in nomogram II door een, als een punt te beschouwen, stukje raakkromme (ter plaatse van de snijding der naar I en III verwijzende waarschuwinglijnen) voorgesteld. De naar nomogram I verwijzende waarschuwinglijn is dus de verbindingslijn van het punt $\varepsilon' = 7,4$ met het voren genoemde punt (eigenlijk de raaklijn uit het punt $\varepsilon' = 7,4$ aan de raakkromme).

g. Bij de toepassing van nomogram II, is er een driehoekig deel van het profiel, wanneer z negatief en $-z \cotg \Phi < 6$ is (geval n^o. 5).

Ook is dit het geval, wanneer z positief en $\varepsilon' >$ ongeveer 7,4 en < 8 is (geval n^o. 3).

Voor beide gevallen doet de waarschuwingslijn dienst, welke het punt $z = 0$ verbindt met het als punt te beschouwen stukje raakkromme voor de grensbetrekking $-z \cotg \Phi = 6$.

· · Bij alle waardestellen van z en $\text{tg } \Phi$, welke binnen het bereik dezer veranderlijken kunnen voorkomen, wijzen dus de stop- en waarschuwingslijnen op duidelijke wijze den weg aan, welke bij het gebruik der nomogrammen moet worden gevolgd.



HOOFDSTUK 27.

Nomogrammen met gebroken schalen.

§ 185. In het voorgaande hoofdstuk zagen wij, dat een *grensbetrekking* dikwijls het totale bereik van een verband tusschen eenige veranderlijken in twee betrekkingen splitst, welke elk op zichzelf door een vergelijking kunnen worden voorgesteld.

Een zelfde soort splitsing kan ook door een **scheidingswaarde** van een der veranderlijken worden teweeggebracht.

Voldoen in dat geval de twee vergelijkingen aan bepaalde voorwaarden, dan is het toch nog mogelijk het totale bereik van het verband door één nomogram voor te stellen, van welk nomogram dan echter de schaal voor de veranderlijke met de scheidingswaarde, op het schaalpunt voor die waarde, **gebroken** zal wezen.

Dat wil zeggen, dat de schaalverdeeling op dat punt discontinu is, terwijl veelal ook de drager aldaar een knik zal hebben. Zulk een schaal noemen wij daarom een **gebroken schaal**.

Wordt het totale verband, door het aanwezig zijn van scheidingswaarden in méér dan een veranderlijke, in méérdere betrekkingen verdeeld, dan is het theoretisch denkbaar, dat twee of drie, c.q. méérvoudig gebroken schalen, optreden. Dergelijke gevallen zijn mij echter practisch niet bekend, om welke reden ik mij zal beperken tot het bespreken van de eenvoudigste nomogramvormen met één gebroken schaal op een evenwijdig schalenstel, en wel aan de hand van het schema **figuur 94**.

Als scheidingswaarde is hierbij aangenomen de waarde θ_3 van de veranderlijke z_3 . De twee functievergelijkingen van een stel hebben steeds dezelfde f_1 en f_2 , daar de schalen $[z_1]$ en $[z_2]$ voor de beide betrekkingen samenvallen. De oorsprongen van de overigens samenvallende schalen behoeven echter niet op elkaar te vallen. Wij hebben in **figuur 94** dus rekening gehouden met een verschuiving $\mu_1 \mathbf{a}$ op $[z_1]$ en $\mu_2 \mathbf{b}$ op $[z_2]$, uitgezonderd in gevallen, waarin een der functievergelijkingen van het type I is, omdat hierbij een verschuiving van de twee evenwijdige schalen, geen invloed heeft op den vorm van de functievergelijking.

Nomogrammen met een gebroken schaal.		
Vorm:	Functievergelijkingen:	Voorwaarden:
	$f_1 + f_2 = f_3$ $f_1 + f_2 = F_3$	$f_{\theta_3} = F_{\theta_3}$
	$f_1 g_3 + f_2 = 0$ $f_1 + f_2 = F_3$	$g_{\theta_3} = 1$ $F_{\theta_3} = 0$
	$f_1 g_3 + f_2 = 0$ $(f_1 + a) g_3 + (f_2 + b) = 0$	$g_{\theta_3} = G_{\theta_3} = -\frac{b}{a}$
	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $f_1 + f_2 = F_3$	$g_{\theta_3} = 1$ $f_{\theta_3} = F_{\theta_3}$
	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $(f_1 + a) g_3 + (f_2 + b) = 0$	$g_{\theta_3} = G_{\theta_3}$ $f_{\theta_3} + a g_{\theta_3} = -b$
	$f_1 g_3 + f_2 = f_3$ $(f_1 + a) g_3 + (f_2 + b) = F_3$	$g_{\theta_3} = G_{\theta_3}$ $F_{\theta_3} - f_{\theta_3} - a g_{\theta_3} = b$

Fig. 94.

Want in plaats van

$$(f_1 + a) + (f_2 + b) = F_3$$

kunnen wij schrijven

$$f_1 + f_2 = (F_3 - a - b).$$

Berekenen wij vervolgens voor beide functievergelijkingen de ligging van het scheidingspunt θ_3 , dan kunnen de voorwaarden in de laatste kolom van figuur 94 afgeleid worden. Uit deze voorwaarden blijkt, dat, van de twee waarden **a** en **b**, er slechts één naar verkiezing kan worden aangenomen.

§ 186. **Voorbeeld.** *Doorslaan van ijzeren constructies met brisante springstof* (figuur 95).

Voor het doorslaan van wel- en vloeijzeren platen, breed **b** en dik **d** cm., met behulp van blokjes brisante springstof van 200 gram, werden door mij uit empirische en andere gegevens twee formules afgeleid ¹⁾, namelijk:

$$\text{voor } b < 16 \text{ is } n = 0,16 \sqrt{bd^3}$$

$$\text{en voor } b > 16 \text{ is } n = 0,04 b \sqrt{d^3}$$

, welke beide vergelijkingen geschreven kunnen worden als type I, n.l.

$$\log n + (-1,5 \log d) = 0,5 \log b + \log 0,16$$

$$\log n + (-1,5 \log d) = \log b + \log 0,04$$

De scheidingswaarde θ_3 is dus hier de waarde $b_2 = 16$.

Aan de voorwaarde uit de laatste kolom van figuur 94 is voldaan, want

$$0,5 \log 16 + \log 0,16 = \log 16 + \log 0,04$$

$$\text{of: } 0,16 \sqrt{16} = 0,04 \times 16.$$

Aan de schaal $[n]$ gaven wij een negatieve modulus om haar tusschen de beide andere schalen te doen vallen.

Voor de oorspronkelijke teekening van figuur 95 waren de schalen:

$$[n] \quad x = -10 \log n$$

$$[d] \quad y = 16^{2/3} (-1,5 \log d) = -25 \log d$$

$$\text{Dus } p = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \delta = -1,5\delta \text{ en } \mu_3 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = -25$$

$$\text{dus } [b] \quad \begin{cases} q = -12,5 \log b - 25 \log 0,16 \\ q' = -25 \log b - 25 \log 0,04 \end{cases}$$

¹⁾ Zie: „Mavors” Mei 1923. „Nomogrammen voor lading-berekening”.

De schaalverdeling van $[b]$ is dus gebroken bij het scheidingspunt $b = 16$.

Doorslaan van ijzeren constructies met brisante springstof.

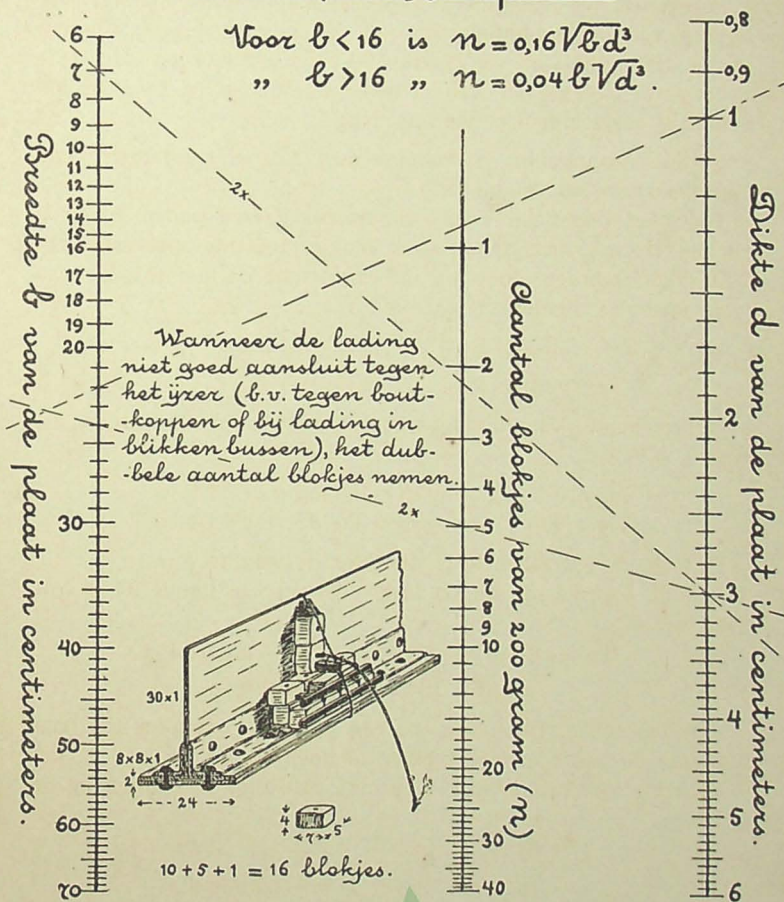


Fig. 95.

Toepassing van het nomogram.

Er wordt gevraagd om de grootte te berekenen van de lading, welke noodig is voor het doorslaan van den in figuur 95 afgebeelden onderrand van een vakwerklijger.

Deze ligger kan verdeeld gedacht worden in:
een geklonken plaat van 24×3 cm.
" " " " 7×3 "
en een vlakke plaat van 22×1 "
, waarvoor onderscheidenlijk 10; 5 en 1 blokje(s) springstof nodig
zijn (zie de gestippelde afleeslijnen), dus totaal 16 blokjes.
Deze blokjes worden tegen den ligger geklemd, b.v. op de in
de figuur geteekende wijze, en tot ontsteking gebracht met behulp
van een slaghoedje en een eind vuurkoord.



HOOFDSTUK 28.

Benodigde gegevens voor de constructie van een nomogram. Eenige opmerkingen en aanwijzingen.

§ 187. **Benodigde gegevens.** Uit het tot dusver behandelde zal duidelijk gebleken zijn, dat het mogelijk is elke betrekking, steeds op meerdere, dikwijls zeer uiteenlopende wijzen, voor te stellen, vooropgesteld, dat de veranderlijken gescheiden konden worden.

De opgave voor de constructie van een nomogram, zal daarom alle gegevens moeten omvatten, welke noodig zijn, om uit de mogelijke constructievormen de meest geschikte te kunnen uitkiezen.

In het algemeen zijn de volgende gegevens gewenscht:

1^o. De voor te stellen vergelijking(en), met de verklaring van de beteekenis van elk der veranderlijken (welke daarin door letters zijn voorgesteld) en zoo noodig de eenheden, waarin deze veranderlijken worden uitgedrukt. Voorts de waarde van c.q. in de vergelijking voorkomende constanten.

2^o. Het bereik (totale bereik) van elk der veranderlijken, dus de grootste en kleinste waarde van elk dezer.

3^o. Eventueel aanwezige grensbetrekkingen, dat zijn betrekkingen, — tusschen éénige van de veranderlijken, — welke de toepassing van de gegeven vergelijking beperken (zie Hoofdstuk 26).

4^o. De *gewenschte middenwaarde* v voor elk der schalen, dan wel het *normale bereik* van elk der veranderlijken (zie de volgende §).

§ 188. Het is in het algemeen mogelijk, om voor elke veranderlijke welke in een betrekking voorkomt, een zoogenaamde *frequentiekromme* te teekenen (zie figuur 96), aangevende de globale verhouding van de aantallen malen, dat, bij de praktische toepassing van het nomogram, elk der waarden van de veranderlijke zal worden gebruikt.

Zoo is in figuur 96 de verhouding van de ordinaten bij de waarden $z = \varepsilon$ en $z = \nu$, gelijk aan de verhouding van de aantallen malen dat z een waarde van ongeveer ε en een waarde van ongeveer ν zal hebben.

De ordinaten behorende bij α en ω zullen nul of zeer klein wezen, wanneer echter een grenswaarde of grensbetrekking de

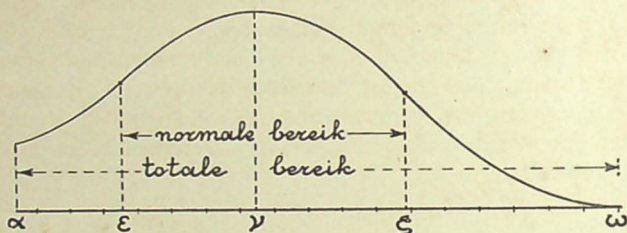


Fig. 96.

geldigheid van de gegeven betrekking beperkt, zal de betreffende ordinataat in het algemeen grooter zijn.

De reeks waarden gelegen tusschen de ordinaten, ongeveer gaande door de buigpunten in de frequentiekromme, noemen wij het **normale bereik** van de veranderlijke (in figuur 96 van ε tot ξ). In tegenstelling daarmede, noemen wij dan het bereik van laagste tot hoogste waarde, het **totale bereik** van die veranderlijke.

Voor al bij de kegelsnedenomogrammen, kunnen de schalen dikwijls zóó geconstrueerd worden, dat de schaaldeelen binnen het normale bereik grooter zijn dan daarbuiten, waardoor dus een gunstige schaalverdeling kan worden verkregen.

§ 189. Om een indruk te verkrijgen van de menigvuldigheid der gevallen, waarin de behandelde nomogramvormen kunnen worden gebruikt, kan de volgende verdeling worden aangenomen.

Van 20 betrekkingen (tusschen drie veranderlijken), welke in wetenschap of techniek voorkomen, zijn er gemiddeld 14 van de 3de orde, 4 van de 4^{de} orde (bij ongeveer de helft hiervan, is een cirkelboogvormige [z_3] mogelijk), 1 van de overige orden en is er 1 niet door een schaalnomogram voor te stellen.

Wat deze laatste betreft, is het meestal nog mogelijk, door een andere keuze van veranderlijken, tot een betrekking te komen, welke zich wél door een nomogram laat voorstellen.

Was b.v. in § 127, in plaats van de verhouding h , de verhouding van de onderbreedte van de trapeziumvormige doorsnede tot de dikte B van de rechthoekige doorsnede gekozen, hetgeen

meer voor de hand liggend zou zijn geweest, dan zouden wij een vergelijking verkregen hebben, waarin de veranderlijken niet gescheiden hadden kunnen worden. Vandaar de eenigszins „gezochte” keuze der veranderlijke **h**.

§ 190. Hoewel voor een betrekking met meer dan 3 veranderlijken afzonderlijke vormen van schaalnomogrammen bestaan, waarvan de bespreking buiten het bestek van dit boek valt, zoo is het dikwijls eenvoudiger, door een combineeren der veranderlijken, het aantal hiervan tot drie terug te brengen. Komen b.v. in een betrekking de veranderlijken z_1 tot en met z_5 voor, dan kan getracht worden twee nieuwe veranderlijken z'_2 en z'_3 in te voeren, zoodanig dat b.v.

$$z'_2 = z_2 \pm z_3 \quad \text{of} \quad = \frac{z_2}{z_3} \quad \text{of} \quad = z_2 z_3$$

en

$$z'_3 = z_4 \pm z_5 \quad \text{of} \quad = \frac{z_4}{z_5} \quad \text{of} \quad = z_4 z_5$$

, of een andere combinatie waarvoor de rekenkundige bewerking gemakkelijk „uit het hoofd” kan worden uitgevoerd. (Zie o.a. § 98 en § 101).

§ 191. Omgekeerd kan het voorkomen, dat een betrekking tusschen 2 veranderlijken zoo ingewikkeld is, dat de berekening van een tabel of de constructie van een dubbelschaal zeer tijdroovend zou wezen. In dat geval, kan dikwijls beter een der veranderlijken, welke op eenige plaatsen in de vergelijking voorkomt, op de eene plaats b.v. z_1 en op een andere plaats z_3 worden genoemd. (Zie opgave 72 op blz. 145).

§ 192. **Enkele aanwijzingen voor het teekenen van nomogrammen.** Voor het teekenen van nomogrammen moet bij voorkeur papier van uitstekende kwaliteit genomen worden, met een niet te ruw, doch ook niet te glad oppervlak. De plaats van punten wordt het best aangegeven, door ze in te prikken met een passerpunt of ontleednaald; projectielijnen worden het vlugst getrokken, door in het projectiecentrum een dunne naald te plaatsen, waartegen de driehoek of liniaal kan steunen.

Voor het trekken van dunne lijnen voldoet een beitelvormig geslepen potloodpunt het meest. Daar de constructielijnen later meerendeels weer uitgegomd moeten worden, mag het potlood niet te hard wezen, anders laat het krassen na. Een 2H-potlood is meestal voldoende hard. Het gebruik van een teekendriehoek

van doorschijnend materiaal is aan te bevelen. Evenwijdig aan de schuine zijde, kan een afleeslijn worden ingekrast. De constructie van logaritmische schalen (zie blz. 44) heeft plaats, hetzij met behulp van een schalenboekje, — dat is een verzameling aaneengehechte papierstrooken, waarop aan de zijkanten logaritmische schaaleenheden van verschillende lengten zijn overgenomen (b.v. van rekenlinialen) —, òf met de gewone of verkorte logaritmische harp.

Bij andere schaalverdelingen kunnen de ónderverdeelingen zoo noodig met den interpolator worden geconstrueerd.

Dragers van kromme, niet-cirkelboogvormige schalen, worden langs mallen getrokken.

Voor voldoende bijschriften, ter verduidelijking van de voorgestelde betrekking en de toepassing van het nomogram, dient te worden gezorgd.

Moet een met inkt geteekende figuur verbeterd worden, dan raad ik aan, zoo mogelijk eerst de verbetering aan te brengen en pas daarna het overtollige weg te radeeren (b.v. met een Gillette-mesje); na het radeeren de papiervezel weer glad te strijken met het bovenzvlak van den nagel.

Op blz. 29 werd reeds opgemerkt, dat krimpen van het papier in het algemeen niet nadeelig is voor de nauwkeurigheid van het nomogram. Daarom is er ook in het algemeen geen bezwaar tegen vermenigvuldiging door lichtdrukken, al is de droge werkwijze daarbij toch meer te verkiezen.

Wel is het noodig bij fotografische reproductie verteekening te voorkomen. Verteekening (distorisie) heeft niet plaats bij gebruik van symmetrische lenzen, ook is zij voldoende te ontgaan, door voor de reproductie gebruik te maken van een lens met grooten brandpuntsafstand.



L I T E R A T U U R ¹⁾.

1. **Soreau (R.)**. Nomographie ou Traité des Abaques. 2 tomes (18 × 26; 780 blz.) Et. Chiron, Paris. 1921.
2. **d'Ocagne (Maurice)**. Traité de Nomographie (483 blz.) Gauthier—Villars, Paris. 1921.
3. **Schwerdt (H.)**. Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage. Springer, Berlin. 1924.
4. **Lipka (J.)**. Graphical and Mechanical Computation. J. Willey and Sons, New-York. 1918.
5. **Werkmeister (Prof. Dr.-Ing. P.)**. Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln. (Nomographie). Springer, Berlin. 1923.
6. **Brodetsky (S.)**. A first course in Nomography. Bell and Sons, London. 1920.
7. **Lacmann (Dr.-Ing. Otto)**. Die Herstellung gezeichneter Rechentafeln. Springer, Berlin. 1923.
8. **Clark (Dr.J.)**. Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre. Revue de Mécanique 1907—1908.
9. **Luckey (P.)**. Einführung in die Nomographie. 2 Bändchen. Teubner, Berlin. 1918, 1920.
10. **Konorski (Ing. B. M.)**. Die Grundlagen der Nomographie. Springer, Berlin. 1923.
11. **Schwerdt (H.)**. Nomographie. Otto Salle, Berlin. 1927.
12. **Pirani (Prof. Dr. Marcello)**. Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik Sammlung Göschen 1919.
13. **Schilling (Prof. Dr. Fr.)**. Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Teubner, Berlin. 1900.
14. **Le Heux (J. W. N.)**. Beginselen der Nomographie. Kluwer, Deventer. 1926.
15. **Wenner (Dr. Fritz)**. Praktische Rechenbildkunde (Nomographie). Aachener Verlags- und Druckerei-Gesellschaft. 1926.
16. **Vaes (Ir. F. J.)**. Overzicht van: „M. d'Ocagne". „Traité de Nomographie. 1899". Marineblad 1900, 2e en 3e afl.

¹⁾ Volgorde ongeveer naar den omvang der werken.

17. **Krauss (Ing. Fritz)**. Die Nomographie oder Fluchtlinien-kunst. (55 blz.). Springer, Berlin. 1923.
18. **Mayer (Dr.-Ing. Max)**. Zur Einführung in die Nomographie. (39 blz.). Bauwelt-Verlag, Berlin. 1926.

No. 7 geeft voorbeelden op hydraulisch gebied, no. 15 toepassingen op het gebied van landmeten en astronomische tijdsbepaling.

Nomogramverzamelingen of nomografisch bewerkte boeken zijn voorts o.a.:

19. **Seco de la Garza (Ricardo)**. (Spaansch Genie-officier). Les Nomogrammes de l'Ingénieur. Gauthier—Villars, Paris. 1912. (Verzameling van nomogrammen voor den pionier-officier).
20. **Steevensz (Ir. J. M.)**. Grafieken voor hydraulische berekeningen. Uitgave van de Vereeniging van Waterstaatsingenieurs in N. O. Indië. 1920.
21. **Seefehlner (E. E.)**. Electriche Zugförderung. Berlin. 1922.
22. **d'Ocagne (Maurice)**. Principes Usuels de Nomographie avec application à divers problèmes concernant l'Artillerie et l'Aviation. Gauthier—Villars, Paris. 1920.
23. **Mayer (Dr.-Ing. Max)**. Nomographie des Bauingenieurs. Sammlung Götschen. 1927.
24. **Schoklitsch (A.)**. Graphische Hydraulik. Teubner, Berlin. 1923.
25. **Vaes (Ir. F. J.)**. Technische rekenplaten. Jaarverslag 1903—1904 No. XVII van het Kon. Inst. v. Ing., Vakafd. voor Werktuig- en Scheepsbouw.
26. **Bergmann (Dr. Ludwig)**. Nomographische Tafeln für den Gebrauch in der Radiotechnik. Springer, Berlin. 1925.



GEBEZIGDE NOTATIES EN TEEKENS.

Notatie of teeken:	Beteekenis:	Zie bladz.:
z	een veranderlijke	10
$z_1, z_2, \text{ enz.}$	1e, 2e veranderlijke, enz.	10
x, y	} door een metrische schaal voorgestelde veranderlijken; 33 x en y voornamelijk voor het rechte schalenstel, 64, 94 p en q (en r) voor de coördinaten van een punt in het vlak van het schalenstel, 64 u en v voor hulpschalen bij projectie. . 66	
p, q, r		
u, v		
f, g, F, G E, H, K $\varphi, \psi, \xi, \zeta$ Φ en Ψ ook: $f(z), g(z), \text{ enz.}$	} functies van z 30	
$f_1, g_3, F_2, \text{ enz.}$		functies van $z_1, z_3, z_2, \text{ enz.}$ 30
$f_{12}, g_{12}, \text{ enz.}$	functies van z_1 én z_2 30	
$[z_1]$	schaal voor z_1 11	
(z_1)	bundel voor z_1 12	
$[z_1, z_2]$	schalenstel, gevormd door $[z_1]$ en $[z_2]$. . 16	
(z_1, z_2)	net, gevormd door (z_1) en (z_2) 16	
$[f]$	schaal voor de functie f 33	
$[\varphi, \psi]$	hulpschalenstel 154, 156	
μ	modulus van een schaal, in cm. 34	

		Bladz.
α	waarde van z , waarvoor $f(z)$ minimum is;	33
ω	waarde van z , waarvoor $f(z)$ maximum is.	33
ν	meest gebezigde waarde van z , of gewenschte middenwaarde van $[z]$. . .	48
η	willekeurige waarde binnen het bereik van z	36
θ	scheidingswaarde van z bij een gebroken schaal	248
τ	waarde van x , behoorend bij een toppunt T op een kegelsnedeschaal	167
k	functielengte of functiebereik $f(\omega) - f(\alpha)$	33
L	ongeveer gewenschte schaalengte in cm.	34
B	maatgevende breedte van het nomogram in cm.	73
D	maatgevende diagonaal van het nomogram in cm.	97
δ	lengte in cm. van den afstand O_1O_2 der oorsprongen, bij een evenwijdig schalenstel.	61
φ	hoek tusschen de schalen van het snijdend schalenstel	95
M	logarithmische schaaleenheid in cm. (Manteb)	44
m	o.a. voor het quotient $\frac{\mu_1}{\mu_2}$	82, 89
n	o.a. voor het quotient $\frac{\delta}{\mu_2}$	89, 157
\approx	(is) ongeveer gelijk aan	34
\neq	(is) ongelijk aan	225
\sim	(is) gelijkvormig met	39
\wedge	(is) perspectief met	39
$\overline{\wedge}$	(is) projectief met	39
\equiv	evenredigheidsteeken voor nomogrammen	77

GRIEKSCH ALPHABET.

<i>A, α</i>	alpha	<i>a</i>	<i>N, ν</i>	nu	<i>n</i>
<i>B, β</i>	bèta	<i>b</i>	<i>Ξ, ξ</i>	xi	<i>x</i>
<i>Γ, γ</i>	gamma	<i>g</i>	<i>Ο, ο</i>	omikron	<i>o</i>
<i>Δ, δ</i>	delta	<i>d</i>	<i>Π, π</i>	pi	<i>p</i>
<i>E, ε</i>	epsilon	<i>e</i>	<i>Ρ, ρ</i>	rho	<i>r</i>
<i>Z, ζ</i>	zèta	<i>z</i>	<i>Σ, σ, ς</i>	sigma	<i>s</i>
<i>H, η</i>	èta	<i>è</i>	<i>T, τ</i>	tau	<i>t</i>
<i>Θ, θ, ϑ</i>	thèta	<i>th</i>	<i>Υ, υ</i>	upsilon	<i>u</i>
<i>I, ι</i>	iöta	<i>i</i>	<i>Φ, φ</i>	phi	<i>ph</i>
<i>K, κ</i>	kappa	<i>k</i>	<i>Χ, χ</i>	chi	<i>ch</i>
<i>Δ, λ</i>	lambda	<i>l</i>	<i>Ψ, ψ</i>	psi	<i>ps</i>
<i>M, μ</i>	mu	<i>m</i>	<i>Ω, ω</i>	omega	<i>oo</i>



SYSTEMATISCH OVERZICHT VAN DE VOORBEELDEN ..
EN OPGAVEN.

1. Algebra.

	Bladz.
Berekening van $\frac{1000}{x}$. Figuur 20	51
$x = \ln. y$ of $y = e^x$. Figuur 20	51
Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen. Figuur 29	77
Gemiddelden van a en b . Figuur 84	203
$z_1 z_2 z_3 = 1$. Figuur 85	206
$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 144$. Figuur 87.	212

Opgaven: 3, 4, 52, 72, 86, 93, 97, 100, 127 en 128.

2. Goniometrie, Vlakke- en Boldriehoeksmeting.

Betrekking in den driehoek. Figuur 53	134
---	-----

Opgaven: 2, 26, 30, 49, 55 en 108.

3. Vlakke Meetkunde en Stereometrie.

Opgaven: 1, 11, 22, 25, 35, 105 en 126.

4. Sterrenkunde en Tijdsbepaling.

Tweede Wet van Kepler. Figuur 24	68
--	----

Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduw lengte.

Figuur 37	91
---------------------	----

Opgaven: 38, 46, 74, 107, 111, 114 en 115.

5. Landmeten en Geodesie.

Opgaven: 14, 21, 40, 69, 76, 88, 94, 97, 99, 116, 117 en 118.

6. Mechanica.

Vrije val en verticale worp. Figuren 4, 5 en 6 15, 16, 17

Verband tusschen toerental en omtreksnelheid. Figuur 86. 210

Opgaven: 17, 28, 29, 43, 50, 62, 80, 85, 101, 123 en 124.

- 7. Warmteleer.** Bladz.
 Herleiding van °C. tot °F. Figuur 20 51
Opgaven: 13, 19, 31, 41, 56, 59, 91, 102, 122 en 125.
- 8. Lichttechniek en Fotografie.**
 Verlichting. Figuren 7, 8, 9 en 10 20, 22, 23, 24
 Instellen zonder matglas. Figuur 43 104
 Lenzen-formule. Figuur 80 197
Opgaven: 19, 57, 90, 96 en 106.
- 9. Electrotechniek.**
 Weerstand van koperen geleidingen. Figuur 20 51
 Zelfinductie van spoelen. Figuur 20 51
 Vervanging van wisselstroom-weerstanden bij overgang
 van parallel- tot serie-schakeling. Figuur 40 98
 Electrische trillingen. Figuur 79 194
 Parallelschakeling van weerstanden, serieschakeling van
 capaciteiten. Figuur 80 197
Opgaven: 10, 16, 18, 20, 23, 24, 39, 41, 48, 58, 75, 77,
 89 en 102.
- 10. Werktuig- en Scheepsbouw.**
 Herleiding van K.W. tot P.K. Figuur 20 51
 Berekening van cilindrische schroefveeren. Figuur 34 86
 Wanddikte van buizen, enz. met inwendigen overdruk.
 Figuur 78 192
Opgaven: 12, 31, 33, 36, 42, 43, 47, 53, 63, 65, 66, 73,
 80, 103, 119 en 121.
- 11. Toegepaste Mechanica en Bouw- en Waterbouwkunde.**
 Dikte van gewapend-betonplaten met enkele wapening
 bij in rekening gebracht eigen gewicht. Figuur 50 126
 Overgang van rechthoekige op trapezium-vormige door-
 snede bij grondkerende muren. Figuur 70. 181
 Vurenhouten stutten. Figuur 90 240
 Grondverzet bij den aanleg van wegen. Figuur 91 242
Opgaven: 25, 27, 47, 53, 67, 71, 73, 79, 81, 82, 95, 103,
 104, 109, 110 en 123.

SYSTEMATISCH OVERZICHT VAN DE VOORBEELDEN ..
EN OPGAVEN.

1. Algebra.

	Bladz.
Berekening van $\frac{1000}{x}$. Figuur 20	51
$x = \ln . y$ of $y = e^x$. Figuur 20	51
Moduli voor het nomogram met drie evenwijdige schalen. Figuur 29	77
Gemiddelden van a en b . Figuur 84	203
$z_1 z_2 z_3 = 1$. Figuur 85	206
$x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = 144$. Figuur 87.	212

Opgaven: 3, 4, 52, 72, 86, 93, 97, 100, 127 en 128.

2. Goniometrie, Vlakke- en Boldriehoeksmeting.

Betrekking in den driehoek. Figuur 53	134
---	-----

Opgaven: 2, 26, 30, 49, 55 en 108.

3. Vlakke Meetkunde en Stereometrie.

Opgaven: 1, 11, 22, 25, 35, 105 en 126.

4. Sterrenkunde en Tijdsbepaling.

Tweede Wet van Kepler. Figuur 24	68
--	----

Tijdsbepaling uit zonshoogte of schaduw lengte.

Figuur 37	91
---------------------	----

Opgaven: 38, 46, 74, 107, 111, 114 en 115.

5. Landmeten en Geodesie.

Opgaven: 14, 21, 40, 69, 76, 88, 94, 97, 99, 116, 117 en 118.

6. Mechanica.

Vrije val en verticale worp. Figuren 4, 5 en 6 15, 16, 17

Verband tusschen toerental en omtreksnelheid. Figuur 86. 210

Opgaven: 17, 28, 29, 43, 50, 62, 80, 85, 101, 123 en 124.

- 7. Warmteleer.** Bladz.
 Herleiding van °C. tot °F. Figuur 20 51
- Opgaven:* 13, 19, 31, 41, 56, 59, 91, 102, 122 en 125.
- 8. Lichttechniek en Fotografie.**
 Verlichting. Figuren 7, 8, 9 en 10 20, 22, 23, 24
 Instellen zonder matglas. Figuur 43 104
 Lenzen-formule. Figuur 80 197
- Opgaven:* 19, 57, 90, 96 en 106.
- 9. Electrotechniek.**
 Weerstand van koperen geleidingen. Figuur 20 51
 Zelfinductie van spoelen. Figuur 20 51
 Vervanging van wisselstroom-weerstanden bij overgang
 van parallel- tot serie-schakeling. Figuur 40 98
 Electriscie trillingen. Figuur 79 194
 Parallelschakeling van weerstanden, serieschakeling van
 capaciteiten. Figuur 80 197
- Opgaven:* 10, 16, 18, 20, 23, 24, 39, 41, 48, 58, 75, 77,
 89 en 102.
- 10. Werktuig- en Scheepsbouw.**
 Herleiding van K.W. tot P.K. Figuur 20 51
 Berekening van cilindrische schroefveeren. Figuur 34 86
 Wanddikte van buizen, enz. met inwendigen overdruk.
 Figuur 78 192
- Opgaven:* 12, 31, 33, 36, 42, 43, 47, 53, 63, 65, 66, 73,
 80, 103, 119 en 121.
- 11. Toegepaste Mechanica en Bouw- en Waterbouwkunde.**
 Dikte van gewapend-betonplaten met enkele wapening
 bij in rekening gebracht eigen gewicht. Figuur 50 126
 Overgang van rechthoekige op trapezium-vormige door-
 snede bij grondkeerende muren. Figuur 70. 181
 Vurenhouten stutten. Figuur 90 240
 Grondverzet bij den aanleg van wegen. Figuur 91 242
- Opgaven:* 25, 27, 47, 53, 67, 71, 73, 79, 81, 82, 95, 103,
 104, 109, 110 en 123.

	Bladz.		Bladz.
Bijzondere functievergelijkin- gen	55, 56, 58, 112, 214	gemeenschappelijke —	17, 154, 155, 161, 216
Cartesische coördinaten	64, 94	Driehoek	255
Cartesius	1	Driehoeksmeting	262
Centimeterverdeling	11	Duale transformatie	3
<i>Chasles</i>	3	Dualiteit	62
Cirkel	89, 109, 174, 175, 184	Dualiteitsbeginsel	2
Cirkelboogvormige schaal		Dubbelpunten	166
88, 109, 132, 254		Dubbelschaal 17, 28, 49, 162, 255	
Cirkelnomogrammen	171, 184	gebonden —	49, 54
Cirkelwaaier	13	vrije —	49
<i>Clark (Dr. J.)</i>	205, 217, 257	Eenheden	253
Collineair	171	Electrotechniek	263
Collineatie	3	Ellips	174, 175
Combineeren der verander- lijken	255	Empirische betrekkingen	3
Concurrent	39, 61, 171	— formules	3, 5, 7
Constanten	253	<i>Euclides</i>	2
Continue reële variabele	7, 8	Evenredigheidsteeken	77
Coördinaten	1, 83	Evenwijdige bundel	13, 63
cartesische —	64, 94	Evenwijdig schalenstel 61, 62, 64	
metrische —	2	regelmatig — —	16
tangentele —	3	Explicite	30, 31, 65, 162
Coördinatennet	7	Faber (A. W.)	44
Coördinatenpapier	6, 7, 29	Figuurlijke voorstelling	6
Cosinusregel	89	Formaat	26
Cyclometrische functies	235	Formule	3, 5, 30
Data	8	empirische —	3, 5, 7
Deel	11, 12, 13	theoretisch afgeleide —	7
Deellijn	12, 13	Fotografie	2, 263
Deelpunt	10, 11	Fotografische reproductie	256
Deelstreep	11	Frequentiekromme	253
Dekpunt	114	Functie	2, 30
<i>Dennert en Pape</i>	44	Functiebereik	33
Derdemachtsvergelijking	207	Functiebundel	13, 16, 28
<i>Descartes</i>	1, 2	Functielengte	33, 78
Dieptelijnen	1	Functienet	18, 29
Differentieeren	122, 233	Functieschaal	
Discontinu	248	11, 13, 16, 28, 33, 36, 43	
Distorsie	256	Functieschalenstel	18, 21
Drager	10, 11, 199, 200	Functievergelijking	31, 55
afzonderlijke — s	155, 156	algemeene —	55, 57, 214
		algemeene — van de 3de orde	57, 189, 224

	Bladz.		Bladz.
algemeene — van de 4de		Hoofddeellijn	12, 13
orde	57, 217, 220	Hoofddeelpunt	10, 11
algemeene — van een orde		Hoofdstralen	35
	58, 214	Hoogere Algebra	207
bijzondere of typische —		— Meetkunde	2
	55, 56, 58, 112, 214	Hoogtelijnen	1
Functiewaarde	33	Hulpschalen	157
Gebogen schaaldrager	154	Hulpschalenstel	154, 158, 182
— schalenstel	154	Hydraulica	264
Gebonden dubbelschaal	49, 54	Hyperbool	174, 176, 191
Gebroken schaal	248		
Gebruik van nomogrammen	29	Implicite	30, 31
Gegevens	170, 253	Indices	10, 167, 220, 222
Gelijkzijdige hyperbool	176	Integraal	234
Gemeenschappelijke drager		Interpolator	35, 256
	17, 154, 155, 161, 216	Interpoleeren	11, 13, 21, 28
— veranderlijken	82		
Gemeten betrekking	5	Karakteristieken	6
Gemiddelde	48, 118, 202	Kegelsnede	62, 89, 166
Genummerde lijn	10	Kegelsnede-nomogrammen	
Genummerd punt	10		55, 155, 165, 254
Geodesie	262	Kegelsnede-schalenstel	168, 170
<i>Gergonne</i>	2	Keuze der veranderlijken	255
Gescheiden veranderlijken		Kleinste functiewaarde	33
	31, 32, 49, 54, 214	<i>Konorski (Ing. B. M.)</i>	257
Getalveranderlijke	7	<i>Krauss (Ing. Fritz)</i>	258
Gewenschte middenwaarde		Krimpen van het papier	29, 256
	48, 114, 121, 253	Kubische kromme	155, 208
Goniometrie	262	— nomogrammen	155, 205
Goniometrische functies	162, 227	Kwadratistische schaal	41, 43
Grafiek	3, 5, 18, 26		
Grafische vervorming	116	<i>Lacmann (Dr.-Ing. Otto)</i>	257
— voorstelling		<i>Lalanne</i>	2
	1, 3, 4, 7, 18, 26, 62	Landmeten	262
Grensbetrekking	237, 253, 254	<i>Le Heux (J. W. N.)</i>	3, 257
Grenswaarden	33, 254	Lengte van een schaal 26, 33, 34	
Grieksch alphabet	261	Lichtdrukken	256
Grondfiguur	14, 61	Lichttechniek	263
Grondtal	111	Lineaire functie	39
Grootste functiewaarde	33	— verwantschap	32
<i>Gunther</i>	1	<i>Lipka (J.)</i>	257
Harmonisch gemiddelde 48, 118, 202		Literatuur	257
Harp	44	Logarithmen	1

	Bladz.		Bladz.
Logarithmenpapier	6, 7	Net	14, 16, 62
Logarithmische anamorphose	3	logarithmisch —	3
— bundel	25	regelmatig —	16, 21
— functie	235	Nevenbetrekkingen	25, 28
— harp	44, 256	Nomografie	3, 4, 5, 7
— schaal		taak der —	3, 5
1, 3, 21, 41, 43, 48, 256		Nomografische orde	55, 58
— schaaleenheid	44	Nomogrammen	18
— verdeeling	44	bundel- —	18, 26, 28
Logarithmisch net	3	cirkel- —	171, 184
Log. sinus-bundel	25	kegelsnede- — 55, 155, 165, 254	
Log. sinus-schaal	25	kubische —	155, 205
Luchtvaart	264	schaal- —	18
Luckey (P.)	257	Nomogrammen met gebroken	
Lijnen	13	schalen	248
 		Nomogramvormen	56, 57, 61
Machtschalen	41, 48	Normale bereik	253, 254
Mac Laurin	171	Notaties	259
Mallen	256	Nulpunt	33
Manteb	44	Nummer	8
Massau	217	 	
Maurice d'Ocagne 3, 241, 257, 258		d'Ocagne	3, 241, 257, 258
Mayer (Dr.-Ing. Max.)	258	Omgekeerd kwadratische	
Mechanica	262	schaal 41, 43	
Mechanisch opgeteekende be-		Omschrijving	5
trekking	5	Onderdeterminanten	208
Meetskunde		Onregelmatige schaal	11
Analytische —	1	Onvolledige veranderlijken 7, 8, 26	
Hoogere —	2	Oorsprong 11, 33, 61, 167, 184, 208	
Projectieve —	2, 114, 165	Oorspronglijn	61
Meetskundige voorstelling	5	Opsporen van formules	3, 7
Meetskundig gemiddelde 48, 118, 202		Orde (Nomografische)	55, 56
Menelaos	103, 116, 224	Ordinaten	208, 254
Meteorologie	264	Overgangen tusschen voor-	
Metrische bundel	13	stellingswijzen	5, 6
— coördinaten	2	Overgangstypen	8
— schaal	11, 13, 33, 165	Overzicht	6, 28
Middenwaarde . 48, 114, 121, 253		 	
Militaire techniek	264	Papier	255
Millimeterpapier	6, 83	Parabool	174, 176
Möbius	2	Pascal	189
Modulus	34	Perspectief	39
 		Perspectiefcentrum	114, 115
Napier	1	Perspectieve ligging	39
Nauwkeurigheid . 42, 53, 78, 256		Pestalozzi	2

Bladz.		Bladz.
257	<i>Pirani (Prof. Dr. Marcello)</i>	logarithmische —
2	<i>Plücker</i>	1, 3, 21, 41, 43, 48, 256
2	<i>Poncelet</i>	macht- — 41, 48
13	Pool	metrische — . 11, 13, 33, 165
6	Poolcoördinatenpapier	omgekeerd
255	Potlood	kwadratische — 41, 43
5, 38	Primaire voorstelling	onregelmatige — 11
199	Productdrager	projectieve — 39, 48
201	Productschaal	rechte — 61, 62
39	Projectief	reciproke — 41, 48
39	— verwante schalen	regelmatige —
39, 44, 182	Projectieve constructie	11, 13, 16, 41, 43, 48
2, 114, 165	— Meetkunde	segmentaire — 41, 43, 46, 202
39, 48	— schaal	Schaaldeel 11
2, 114	— vervorming	Schaaleenheid 44, 256
165, 173, 198	— vorming	Schaallengte 26, 33, 34
14, 16, 21	Raakkromme	Schaalnomogram 18, 26, 61
256	Radeeren	Schaalpunt 3, 11
61, 62	Rechte schaal	Schaalstok 44
61, 62	Recht schalenstel	Schalenboekje 256
199	Reciprokensom-drager	Schalenstel 14, 16
201	Reciprokensom-schaal	evenwijdig — 61, 62, 64
41, 48	Reciproke schaal	gebogen — 154
3	— transformatie	hulp- — 154, 158, 182
7, 8	Reële variabele	kegelsnede- — 168, 170
7	— waarden	recht — 61, 62
13, 16, 21	Regelmatige bundel	regelmatig evenwijdig — . 16
11, 13, 16, 41, 43, 48	— schaal	snijdend — 61, 62, 94
13	— waaier	Scheefhoekige assen 89, 109
16, 21	Regelmatig net	Scheepsbouw 263
16	— evenwijdig schalenstel	Scheiding der veranderlijken
48, 120, 202	Rekenkundig gemiddelde	31, 55, 214, 255
1, 6, 7, 44	Rekenliniaal	Scheidingswaarde 248
30, 42, 53	Relatieve bereik	<i>Schilling (Prof. Dr. Fr.)</i> 257
42, 53	— nauwkeurigheid	<i>Schoklitsch (A.)</i> 258
29, 256	Reproductie	<i>Schwerdt (H.)</i> 14, 257
3, 10, 11, 13, 63	Schaal	Schijnbare orde 58
11, 13, 16, 28, 33, 36, 43	functie —	<i>Seco de la Garza (Ricardo)</i> 258
248	gebroken —	Secundaire voorstellingswijze 5
41, 43	kwadratische —	<i>Seefehlner (E. E.)</i> 258
26, 33, 34	lengte van een —	Segmentaire schaal 41, 43, 46, 202
		Snijdend schalenstel . 61, 62, 94
		Snijkromme 14, 16, 36
		Sociale wetenschappen 264
		Somdrager 200

	Bladz.		Bladz.
Somschaal	201	Typen	58
Soorten	7, 8	Typische functievergelijkingen	55, 58
Soortnamen	8		
Soortveranderlijke	7, 8, 25, 26	<i>Vaes</i> (<i>Ir. F. J.</i>)	3, 257, 258
<i>Soreau</i> (<i>R.</i>)	3, 55, 219, 233, 257	Variabele	7
Statistische betrekking	8	Veranderlijken	7, 8, 30
<i>Steevensz.</i> (<i>Ir. J. M.</i>)	3, 258	combineeren der —	255
<i>Steiner</i>	2	gemeenschappelijke —	82
Stelling van <i>Mac Laurin</i>	171	keuze der —	254
— — <i>Menelaos</i>	103, 116, 224	onvolledige —	7, 8, 26
— — <i>Pascal</i>	189	scheiding der —	31, 55, 214, 255
Stelsel betrekkingen	82	volledige —	7, 8
Stereometrie	262	Veranderlijke grootheid	7
Sterrenkunde	262	Vereenvoudigde constructie-	
Stoplijn	238	formules	157, 159, 162
Stralen	166	Vergelijking	1, 3, 5, 30
Stralenbundel	13, 63	— met gescheiden veran-	
Stroom	12, 13	derlijken	31, 32, 49, 54, 218
Symmetrie van gegevens	171	— van een lijn	1
Symmetrische betrekking	31	Verkorte logaritmische	
		harp	44, 46
Taak der Nomografie	3, 5	Verkorting der schaaldeelen	120
Taalkundige voorstelling	5	Verlenging der schaaldeelen	120
Tabel	1, 5, 6	Verloop van een betrekking	6, 28
Tangenslijn	173	Verplaatsing van den oor-	
Tangentieële coördinaten	3	sprong	179, 219
<i>Tavernier-Gravet</i>	44	Vervormde schalen	115
Teekendriehoek	255	Vervorming	29, 115, 125
Teekenen van nomogrammen	255	analytische —	116
Teekens	259	grafische —	116
Theoretisch afgeleide betrek-		projectieve —	2, 114
king	5	Verteekening	256
— — formule	7	Vierdegraadsvergelijking	211
Toeganglijn	239	Vierdegraadskromme	211
Toegepaste Mechanica	263	Vierkantsvergelijking	166, 189
Toegevoegde punten	114	Vlakke Driehoeksmeting	262
Toppunt	13, 165, 167	Vlakke Meetkunde	262
Totale bereik	253, 254	Vluchtpunt	115, 167, 184
Transformatie	2	Volgorde van soorten	8
duale of reciproke —	3	Volledige veranderlijke	7, 8
Transversaal		Voorstelling (swijze)	1
13, 84, 116, 166, 173, 198, 225		algebraïsche —	5
Trekken van lijnen	255	figuurlijke —	6
Tijdsbepaling	262	grafische —	1, 3, 4, 7, 18, 26, 62

	Bladz.		Bladz.
meetkundige —	5	geheele —	8
primaire —	5, 38	reële —	7
rekenkundige —	5	scheidings- —	248
secundaire —	5	Waardenstel	14, 49, 62
taalkundige —	5	Waarschuwinglijn	239
Voorstelling van betrekkin-		Warmteleer	263
gen	3, 5, 8	Waterbouwkunde	263
— — — — — vergelijkingen	3	<i>Wenner (Dr. Fritz)</i>	257
— — — — — een veranderlijke	11	<i>Werkmeister (Prof. Dr.-Ing. P.)</i>	257
— — — — — een waarde	10	<i>Werktuigbouw</i>	263
Voorstellingsmiddelen	5	Woordelijke omschrijving	5
Vouwen van het papier	29	Wortels van een vierkants-	
Vrije coëfficiënten	55	vergelijking	189
Vrije dubbelschaal	49	— — — — — derdemachtsver-	
		vergelijking	207
Waaier	13, 62	Zwart-wit-schaal	26, 27
regelmatige —	13		
Waarden	8, 10, 33, 62, 254		



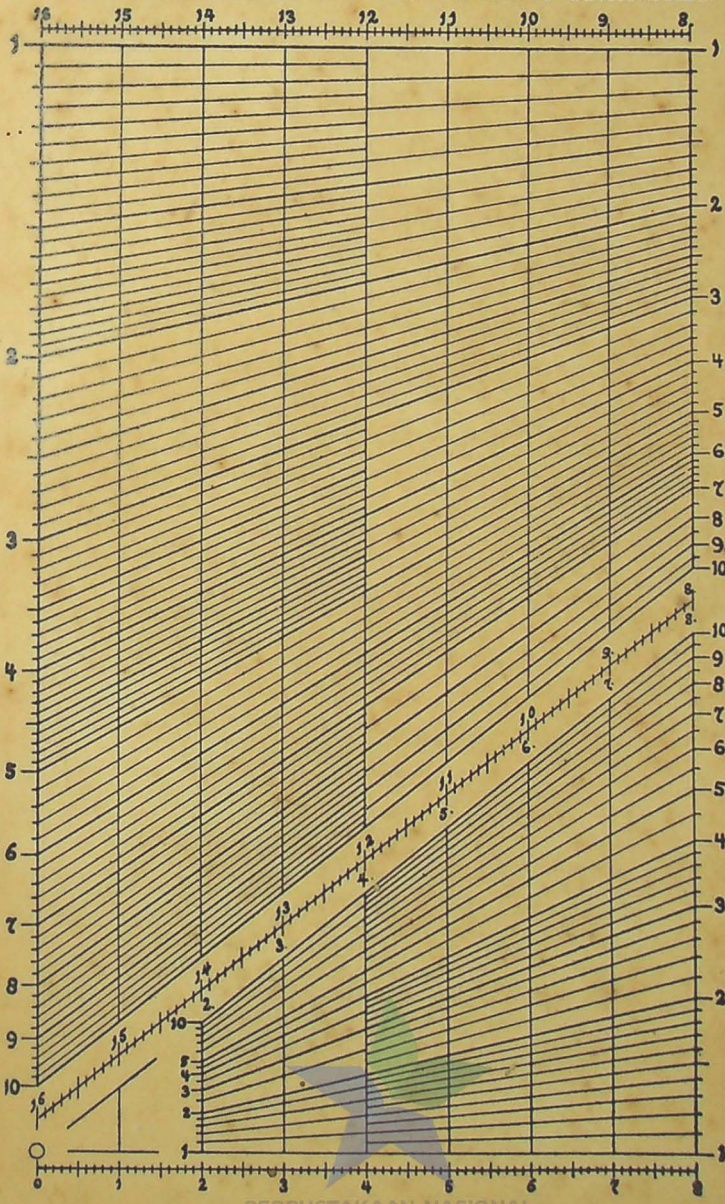
PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

PERPUSTAKAAN NASIONAL RI.



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

Logarithmische harp. ~~voor~~
 voor schaalenheden van 2 tot 16 centimeter.



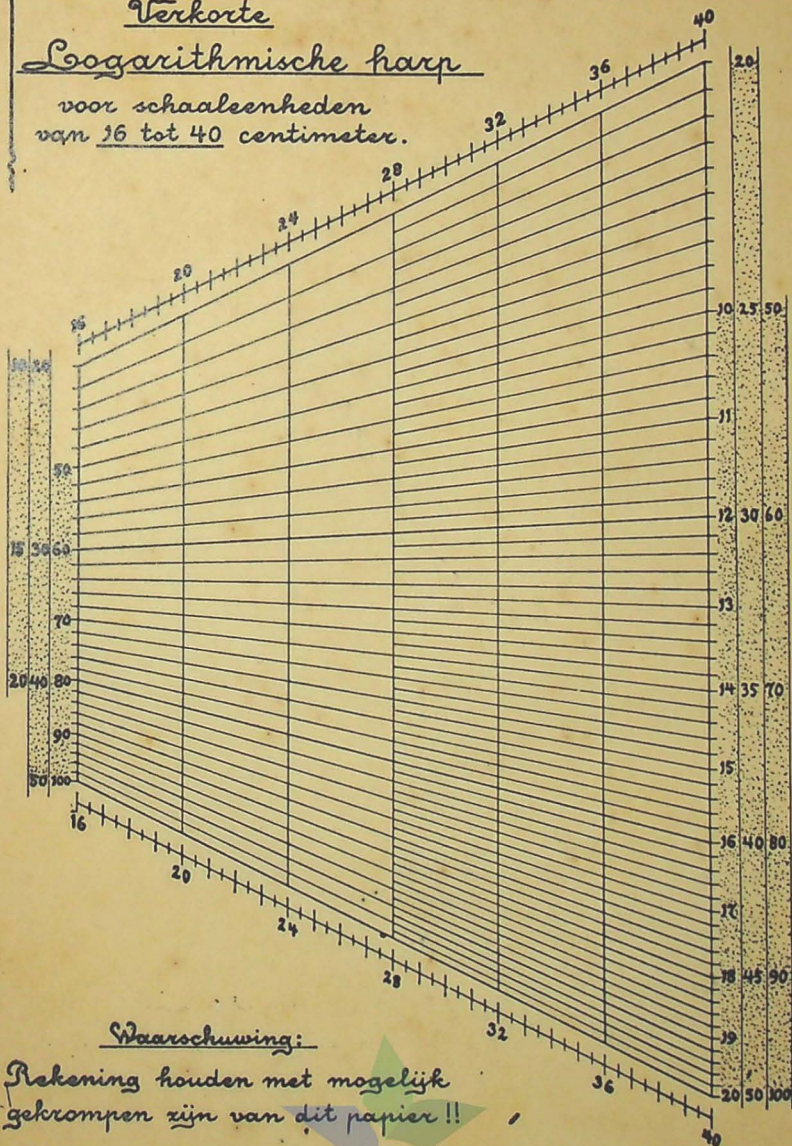
Schaalwijzing: Rekening houden met mogelijk gekrompen zijn van dit papier !!



PERPUSTAKAAN NASIONAL
REPUBLIK INDONESIA

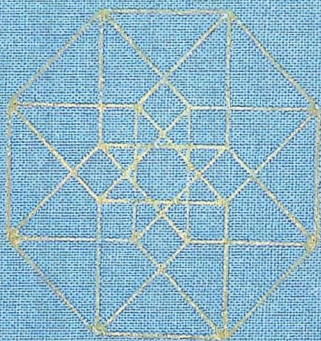
Verkorte
Logarithmische harp

voor schaaleneheden
van 16 tot 40 centimeter.



Waarschuwing:

Rekening houden met mogelijk
gekrompen zijn van dit papier !!



HERFESTMÄRKES MESSING